

FACULDADE DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS – FATECS
CURSO: ENGENHARIA CIVIL

Naiara Guimarães de Oliveira Porto

MATRÍCULA: 2106265/1

ANÁLISE PARAMÉTRICA DO COMPORTAMENTO DE ELEMENTOS DE
MEMBRANA APLICADA A ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO VIA
CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Brasília
2016

NAIARA GUIMARÃES DE OLIVEIRA PORTO

**ANÁLISE PARAMÉTRICA DO COMPORTAMENTO DE ELEMENTOS DE
MEMBRANA APLICADA A ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO VIA
CONFIABILIDADE ESTRUTURAL**

Trabalho de Curso (TC) apresentado
como um dos requisitos para a
conclusão do curso de Engenharia Civil
do UniCEUB– Centro Universitário de
Brasília

Orientadora: Eng^a Civil M.Sc. Nathaly
Sarasty Narváez

Brasília
2016

NAIARA GUIMARÃES DE OLIVEIRA PORTO

**ANÁLISE PARAMÉTRICA DO COMPORTAMENTO DE ELEMENTOS DE
MEMBRANA APLICADA A ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO VIA
CONFIABILIDADE ESTRUTURAL**

Trabalho de Curso (TC) apresentado
como um dos requisitos para a
conclusão do curso de Engenharia Civil
do UniCEUB– Centro Universitário de
Brasília

Orientadora: Eng^a Civil M.Sc. Nathaly
Sarasty Narváez

Brasília, 2016.

Banca Examinadora

Eng^a.Civil: Nathaly Sarasty Narváez, M.Sc.
Orientadora

Eng^o. Civil: William Oliveira Bessa, D.Sc.
Examinador Interno

Eng^o. Civil: João da Costa Pantoja, D.Sc.
Examinador Externo

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, a meus pais, Carlos Henrique e Carem Lúcia, que confiaram em mim e fizeram parte de todas as etapas da minha formação, me apoiando e encorajando a sempre seguir em frente.

A meus irmãos, que são minha inspiração e me fazem ser uma pessoa melhor a cada dia.

A toda minha família e amigos que estiveram sempre ao meu lado.

A todos que tive a oportunidade de conhecer durante meu período de intercâmbio e fizeram deste um momento especial, agregando valores, conhecimentos e oportunidades valiosas.

Àquelas pessoas que convivi e aprendi, mesmo que indiretamente, durante todo esse processo de formação.

Ao UniCEUB e todo o corpo docente, que formaram toda a base da minha educação.

A todos os professores que compartilharam seus conhecimentos pessoais e profissionais e fizeram parte do meu crescimento.

A todos os profissionais que tive a oportunidade de trabalhar e tiveram uma enorme importância para o meu engrandecimento profissional.

A João da Costa Pantoja, educador que me acompanhou desde o início, me guiando e auxiliando nos momentos em que mais precisei. Por todos os conselhos e ensinamentos por ele conferidos, meu muito obrigado.

A minha orientadora Nathaly Sarasty Narváez, pela assistência e paciência para sanar as dúvidas durante a execução deste trabalho.

RESUMO

Elevado nível de segurança aliado a eficiência em uma estrutura são fundamentais para a execução de um projeto estrutural adequado. Análises e métodos direcionados a modelagem e dimensionamento de estruturas mais complexas são essenciais para garantir os pontos mencionados. Este trabalho tem como objetivo fazer uma análise paramétrica em elementos de membrana de estruturas de concreto armado via confiabilidade estrutural. Para obtenção do nível de segurança do elemento de membrana o método de simulação de Monte Carlo foi utilizado. Uma variação determinística nos carregamentos aplicados sobre o elemento de membrana é feita e a contribuição de cada modo de falha considerada, obtendo-se assim, o índice de confiabilidade e sua variação com determinados parâmetros de projeto. Haverão diferentes contribuições do concreto e do aço à resistência dos esforços, gerando várias probabilidades de falha nos elementos constituintes e no sistema como um todo. Por meio de uma análise comparativa, ilustrada graficamente, o trabalho mostra diferentes casos de carregamentos no elemento de membrana, ocasionando modos de falhas distintos em cada situação. Os modos de falha aqui estudados podem ser o escoamento do aço na direção x e/ou y , esmagamento do concreto e a falha do sistema como um todo. A presente metodologia tem como resultado principal o “controle”, pelo projetista, do nível de ductilidade de cada elemento de membrana e sua relação com os tipos possíveis de carregamentos atuantes. É possível, assim, obter o escoamento da armadura anteriormente ao esmagamento do concreto na maioria dos casos de carregamento, tornando-o um elemento dúctil.

Palavras-chave: Confiabilidade. Método de Monte Carlo. Elementos de Membrana. Modos de Falha.

ABSTRACT

Safety high level combined with efficiency in a structure are the key to the implementation of appropriate structural design. Analysis and methods aimed at modeling and design of complex structures are essential to guarantee the points mentioned. This paper intends to analyze, parametrically, membrane elements of reinforced concrete structures by structural reliability. The Monte Carlo simulation method was used to obtain the safety level of membrane element. A deterministic change in loading applied on the membrane element is used, and the contribution of each failure mode considered, obtaining the reliability index and its variation based on certain design parameters. There will be different contributions from concrete and steel resistance efforts, generating several probabilities of failure in constituent elements and the system as a whole. Through a comparative analysis, illustrated graphically, the paper shows different work loads in membrane element, causing distinct modes of failure in each situation. The failure modes studied are the yield stress of steel in X and/or Y, yield point in concrete and failure of the system as a whole. The main result of this methodology consists in the "control", by the project designer, of the ductility level of each membrane element and its relationship with the possible active loads types. Thus, it is possible to obtain the steel yield point prior to the failure of the concrete in most loading cases, resulting in a ductile element.

Key words: Reliability. Monte Carlo Method. Membrane Elements. Failure Modes.

SUMÁRIO

RESUMO.....	5
ABSTRACT	6
SUMÁRIO.....	7
ÍNDICE DE TABELAS	11
ÍNDICE DE ABREVIACÕES	12
ÍNDICE DE SÍMBOLOS.....	13
1. INTRODUÇÃO	15
2. OBJETIVOS	16
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
3.1 ELEMENTOS DE MEMBRANA.....	17
3.1.1 HISTÓRICO	17
3.1.2 ELEMENTOS DE MEMBRANA SUJEITOS A CISALHAMENTO PURO.....	19
3.1.2.1 ARMADURAS MÍNIMAS	24
3.1.3 ELEMENTOS DE MEMBRANA SUJEITOS A FORÇAS NORMAIS E CISALHAMENTO.....	25
3.1.3.1 CASO DE CARREGAMENTO I	27
3.1.3.2 CASO DE CARREGAMENTO II	30
3.1.3.3 CASO DE CARREGAMENTO III	31
3.1.3.4 CASO DE CARREGAMENTO IV	31
3.1.3.5 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO ALTERNATIVAS	34
3.1.3.6 ARMADURAS E LIMITE PARA TENSÃO MÁXIMA DE COMPRESSÃO	35
3.1.3.7 ARMADURAS MÍNIMAS PARA ELEMENTOS DE MEMBRANA.....	36
3.2 SIMULAÇÃO.....	38
3.3 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....	39
3.3.1 ÍNDICE DE CONFIABILIDADE.....	42
3.4 MÉTODO DE MONTE CARLO	45
4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS	46
4.1 COMPRESSÃO EM Y	48
4.2 COMPRESSÃO EM X	51
4.3 COMPRESSÃO EM X E Y.....	53
4.4 CISALHAMENTO XY	55
4.5 TRAÇÃO EM Y	60
4.6 COMPRESSÃO EM Y E CISALHAMENTO.....	63
4.7 TRAÇÃO EM Y E CISALHAMENTO	67
4.8 COMPRESSÃO EM X, Y E CISALHAMENTO	71
4.9 TRAÇÃO EM X, Y E CISALHAMENTO	76
5. CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS	80

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	82
-------------------------------------	----

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1: ESTRUTURAS IDEALIZADAS COMO SENDO UM CONJUNTO DE ELEMENTOS DE MEMBRANA.....	17
FIGURA 2: DISTRIBUIÇÃO LINEAR DE DEFORMAÇÃO EM UMA VIGA DE CONCRETO ARMADO..	18
FIGURA 3: EXEMPLOS DE "REGIÕES D" E SEUS CONTORNOS.....	19
FIGURA 4: (A) ELEMENTO EM CONCRETO ARMADO SUJEITO A CISALHAMENTO PURO E FISSURAS DIAGONAIS, FORMANDO SÉRIE DE DIAGONAIS DE CONCRETO COMPRIMIDAS (B).....	19
FIGURA 5: EQUILÍBRIO DE FORÇAS NAS FACES VERTICAL E HORIZONTAL DO ELEMENTO.	20
FIGURA 6: ELEMENTO DE CONCRETO ARMADO SUJEITO A ESFORÇOS DE MEMBRANA.	25
FIGURA 7: ÂNGULOS DAS TENSÕES PRINCIPAIS EM ELEMENTO DE CONCRETO ARMADO E ELEMENTO DE CONCRETO SIMPLES.....	26
FIGURA 8: DETERMINAÇÃO DA RESULTANTE DE TRAÇÃO NAS ARMADURAS DA DIREÇÃO X (CASO I).	27
FIGURA 9: DETERMINAÇÃO DA RESULTANTE DE TRAÇÃO NAS ARMADURAS DA DIREÇÃO Y (CASO I).	28
FIGURA 10: DETERMINAÇÃO DA COMPRESSÃO DIAGONAL NO CONCRETO (CASO I).....	29
FIGURA 11: DETERMINAÇÃO DA COMPRESSÃO DIAGONAL NO CONCRETO (CASO IV).....	32
FIGURA 12: DETERMINAÇÃO DAS ARMADURAS MÍNIMAS EM ELEMENTOS DE MEMBRANA.	36
FIGURA 13: DEFINIÇÃO DO DOMÍNIO DE FALHA.....	42
FIGURA 14: DISTRIBUIÇÃO DE MARGEM DE SEGURANÇA.....	43
FIGURA 15: ÍNDICE DE CONFIABILIDADE E O PONTO DE PROJETO NO ESPAÇO NORMAL PADRÃO.	44
FIGURA 16: ELEMENTO DE MEMBRANA SUBMETIDO À FORÇAS NORMAIS DE COMPRESSÃO EM Y.....	48
FIGURA 17: ELEMENTO DE MEMBRANA SUBMETIDO À FORÇAS NORMAIS DE COMPRESSÃO EM X.....	51
FIGURA 18: ELEMENTO DE MEMBRANA SUBMETIDO À FORÇAS NORMAIS DE COMPRESSÃO EM X E Y.....	53

FIGURA 19: ELEMENTO DE MEMBRANA SUBMETIDO À FORÇA DE CISALHAMENTO.	55
FIGURA 20: ELEMENTO DE MEMBRANA SUBMETIDO À FORÇAS NORMAIS DE TRAÇÃO EM Y..	60
FIGURA 21: ELEMENTO DE MEMBRANA SUBMETIDO À FORÇAS NORMAIS DE COMPRESSÃO EM X E CISALHAMENTO.	63
FIGURA 22: ELEMENTO DE MEMBRANA SUBMETIDO À FORÇAS NORMAIS DE TRAÇÃO EM X E CISALHAMENTO.	67
FIGURA 23: ELEMENTO DE MEMBRANA SUBMETIDO À FORÇAS NORMAIS DE COMPRESSÃO EM X, Y E CISALHAMENTO.	72
FIGURA 24: ELEMENTO DE MEMBRANA SUBMETIDO À FORÇAS NORMAIS DE TRAÇÃO EM X, Y E CISALHAMENTO.	76

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 1: TAXA DE ARMADURA MÍNIMA POR DIREÇÃO PARA ELEMENTOS SOB CISALHAMENTO.	25
TABELA 2: RESUMO DAS EQUAÇÕES PARA ELEMENTOS DE MEMBRANA EM CONCRETO ARMADO.....	35
TABELA 3: TAXA DE ARMADURA MÍNIMA PARA ELEMENTOS DE MEMBRANA EM CADA DIREÇÃO.	38
TABELA 4: RELAÇÃO ENTRE β E pf	45
TABELA 5: VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DO PROBLEMA.....	46

ÍNDICE DE ABREVIações

ABNT	ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS
NBR	NORMA BRASILEIRA
ELU	ESTADO LIMITE ÚNICO
ELS	ESTADO LIMITE DE SERVIÇO

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

n	Força normal por unidade de comprimento
a_s	Área de uma barra longitudinal
f_s	Tensão atuante nas barras
q	Fluxo de cisalhamento
S	Espaçamento entre barras
σ_d	Tensão diagonal do concreto
σ	Tensão atuante
h	Espessura do elemento de membrana
ρ	Taxa de armadura
τ	Tensão de cisalhamento
$\xi \cdot f_{ck}$	Tensão efetiva
f_{ctm}	Resistência média à compressão do concreto
Z	Força de tração
V_{xy}	Força cortante por unidade de comprimento
f_{ck}	Resistência do concreto
R	Resistência
S	Solicitação
γ_c	Fator de segurança global
γ_r	Coeficiente de minoração das resistências
γ_i	Coeficiente de minoração i-ésima solicitação
C	Confiabilidade estrutural
P_f	Probabilidade de falha
$G(X)$	Função de falha
X	Vetor das variáveis aleatórias
β	Índice de confiabilidade
μ_R	Média da resistência
μ_S	Média da solicitação
σ_R	Desvio padrão da resistência

σ_s	Desvio padrão da solicitação
$\Phi()$	Função de distribuição acumulada de variável normal padrão
N	Número total de simulações
n	Número de ocorrência de falhas
f_{cm}	Resistência média à compressão do concreto
f_{ym}	Resistência média à tração do aço
j	Número de modos de falha identificados
U	Vetor das variáveis normais padrão estaticamente independente

1. INTRODUÇÃO

A engenharia civil é uma área em que é necessário o constante aprimoramento de suas técnicas. Isto se dá pela diversidade e complexidade das construções existentes e que ainda virão a existir. Além disso, a engenharia afeta diretamente e indiretamente a vida das pessoas e o meio ambiente, se tornando um problema de cunho social.

Dentro da engenharia civil existem algumas preocupações em que pesquisadores e engenheiros buscam estudar e encontrar soluções para diminuir riscos e custos dentro da construção civil. Dentre essas, duas que se destacam são a eficiência da estrutura e a sua segurança, ou seja, a estrutura precisa resistir aos esforços solicitantes com menos materiais e mais segurança.

Pensando nisso, ao longo dos anos foi surgindo a necessidade de respostas cada vez mais simples, rápidas e precisas para a análise estrutural. O presente trabalho tem o intuito de apresentar algumas soluções de análise do concreto armado que são utilizadas hoje em dia para otimizar o dimensionamento de estruturas paralelamente a sua segurança.

Dentre os temas abordados estão os Elementos de Membrana (elementos retangulares submetidos às forças de compressão, tração e cisalhamento no plano), estudo de confiabilidade (probabilidade de falha de uma estrutura), Método de Monte Carlo (método estatístico de simulação numérica).

Apesar dos constantes estudos, a análise pode se tornar inviável devido à complexidade da estrutura. Dessa forma, com o auxílio da tecnologia, hoje em dia é possível utilizar programas computacionais para resolver problemas da engenharia que, antigamente, pareceriam impossíveis ou que demandariam um tempo enorme para serem executados.

Como exemplo para esta abordagem, será utilizado neste trabalho, o programa MATLAB, auxiliando na análise de confiabilidade dos elementos de membrana.

2. OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

Realizar uma análise comparativa, por meio de gráficos, dos resultados quando um elemento de membrana é submetido à esforços normais e cortantes aplicando confiabilidade.

2.2 Objetivos específicos

- Entender os conceitos fundamentais dos elementos de membrana;
- Entender o que são métodos de simulação como introdução do Método de Monte Carlo;
- Aprender o que é e como se aplica confiabilidade em uma estrutura, para saber o nível de segurança do elemento de membrana;
- Calcular a probabilidade de falha usando o Método de Monte Carlo;
- Analisar os resultados para melhorar o desempenho de uma estrutura de concreto armado quando submetida a diferentes esforços;
- Comparar resultados graficamente para diferentes cenários de esforços;
- Analisar qual a real contribuição do concreto e do aço dentro do concreto estrutural.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

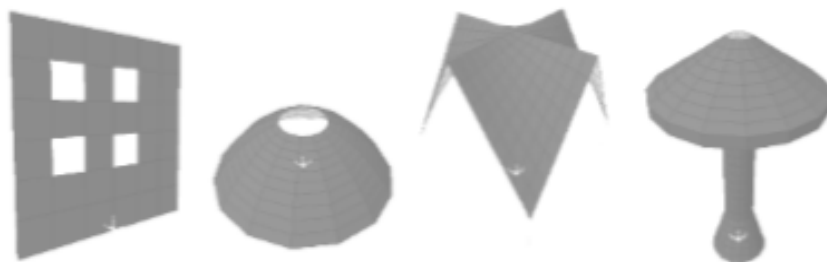
3.1 Elementos de membrana

De acordo com Souza (2015), o elemento de membrana pode ser definido como um elemento retangular submetido às forças normais e cortantes no plano. Estes elementos podem ser utilizados para compor estruturas mais complexas, possibilitando uma maior compreensão no momento da análise e dimensionamento da estrutura.

Dentre os elementos estruturais no qual os elementos de membrana podem ser estudados estão: vigas-paredes, almas de vigas de pontes e viadutos, reservatórios e paredes estruturais.

A Figura 1 apresenta alguns exemplos de geometrias possíveis a partir dos elementos de membrana.

Figura 1: Estruturas idealizadas como sendo um conjunto de elementos de membrana.



Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.1)

3.1.1 Histórico

Para se analisar um elemento de membrana é interessante uma breve explanação sobre trabalhos anteriores a respeito do concreto armado.

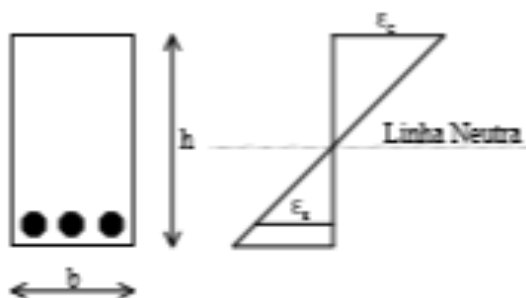
Um modelo interessante a ser citado é o “Equilibrium (Plasticity) Truss Model”, baseado na Teoria da Plasticidade, sendo uma junção dos estudos das três equações de equilíbrio para força cortante, Nielson (1967), Lampert e Thurlimann (1968, 1969) e Hsu (1993), e da interação entre flexão, força cortante e momento torçor, Elfegren (1972).

Por este modelo tem-se que no concreto armado as armaduras longitudinal e transversal devem escoar anteriormente ao esmagamento do concreto para garantir uma estrutura dúctil.

Dessa forma, é possível dividir os elementos submetidos à cisalhamento em subarmados (escoamento das armaduras é simultâneo ao esmagamento do concreto) e superarmados (o concreto se rompe antes das armaduras).

Em uma estrutura é possível identificar Regiões B e Regiões D. As regiões B são baseadas na “Hipótese de Bernoulli”, onde se assume uma distribuição de deformação linear ao longo da altura da seção transversal do concreto armado, como pode ser observado na Figura 2.

Figura 2: Distribuição linear de deformação em uma viga de concreto armado.



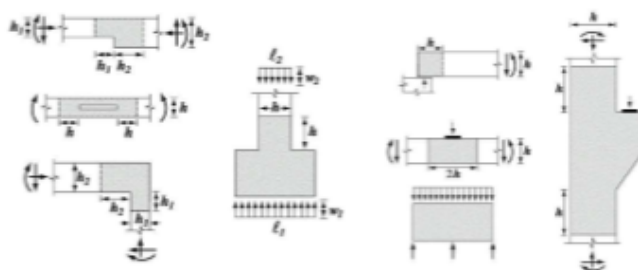
Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.56)

Nesta hipótese, porém, não se leva em consideração as distorções provocadas pela força cortante, o que não pode ocorrer em regiões de irregularidades, como pontos de aplicação de cargas ou regiões com irregularidades geométricas.

Dessa forma, existem as Regiões D nas estruturas, em que o esforço cortante é transmitido por compressão através de escoras inclinadas ("strut action"), devido a variação do braço de alavanca interno.

A Figura 3 apresenta alguns exemplos das Regiões D.

Figura 3: Exemplos de "Regiões D" e seus contornos.

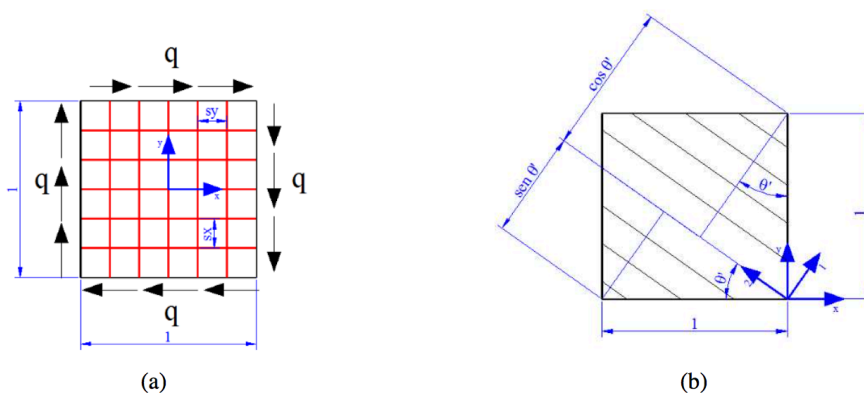


Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.58)

3.1.2 Elementos de membrana sujeitos a cisalhamento puro

A Figura 4(a) ilustra um elemento de membrana que possui espessura h e comprimento unitário nas direções X e Y submetido a cisalhamento puro no plano. A Figura 4(b) mostra as fissuras diagonais causadas pelo concreto comprimido.

Figura 4: (a) Elemento em concreto armado sujeito a cisalhamento puro e fissuras diagonais, formando série de diagonais de concreto comprimidas (b).

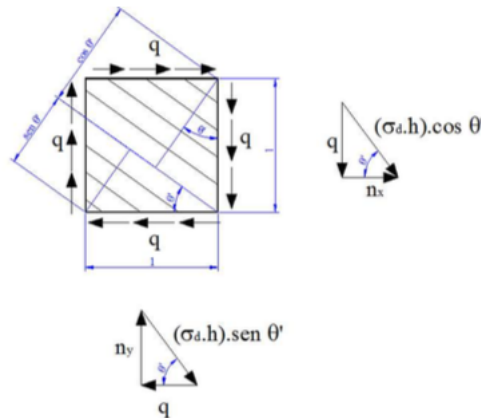


Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.59) 1

As barras possuem espaçamento S_x e S_y nas direções X e Y , respectivamente. Observa-se pela Figura 4 que as barras longitudinais e transversais formam uma treliça capaz de resistir ao fluxo de cisalhamento q .

A Figura 5 apresenta o equilíbrio das forças horizontais e verticais.

Figura 5: Equilíbrio de forças nas faces vertical e horizontal do elemento.



Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.60)

Observando a Figura 5 e assumindo que haverá escoamento para as armaduras nas duas direções, tem-se:

$$n_x = \frac{a_{sx} \cdot f_{sx}}{s_x} = \frac{cm^2 \cdot \frac{KN}{cm^2}}{m} = \frac{KN}{m} \quad \text{Equação 1}$$

$$n_y = \frac{a_{sy} \cdot f_{sy}}{s_y} = \frac{cm^2 \cdot \frac{KN}{cm^2}}{m} = \frac{KN}{m} \quad \text{Equação 2}$$

Em que,

n = força longitudinal no aço por unidade de comprimento;

a_s = área de uma barra longitudinal (cm^2);

f_s = tensão atuante nas barras (KN/cm^2);

$$a_s/s = a_s/1(m) = \text{armadura necessária por m linear.}$$

A partir das equações de equilíbrio:

$$q = n_x \cdot tg\theta' \quad \text{Equação 3}$$

$$q = n_y \cdot cotg\theta' \quad \text{Equação 4}$$

$$q = (\sigma_d \cdot h) \cdot sen\theta' \cdot cos\theta' \quad \text{Equação 5}$$

Em que:

$$\sigma_d = \text{tensão diagonal do concreto.}$$

Igualando as Equações 3 e 4, tem-se:

$$\begin{aligned} n_x \cdot tg\theta' &= n_y \cdot cotg\theta' \\ tg\theta' &= \sqrt{\frac{n_y}{n_x}} \end{aligned} \quad \text{Equação 6}$$

Multiplicando as equações 3 e 4, tem-se:

$$\begin{aligned} q_y^2 &= n_x \cdot n_y \cdot tg\theta' \cdot \frac{1}{tg\theta'} \\ q_y &= \sqrt{n_x \cdot n_y} \end{aligned} \quad \text{Equação 7}$$

Para garantir um elemento dúctil, o objetivo do projeto é garantir que o escoamento da armadura em x e/ou y aconteça antes da tensão σ_d do concreto.

Dessa forma, as Equações 3, 4 e 5 podem ser escritas em função n_x , n_y e σ_d :

$$n_x = q_y \cdot cotg\theta' \quad \text{Equação 8}$$

$$n_y = q_y \cdot tg\theta' \quad \text{Equação 9}$$

$$\sigma_d = \frac{q_y}{h \cdot \sin \theta' \cdot \cos \theta'} \quad \text{Equação 10}$$

Transformando as Equações 8, 9 e 10 em termos de tensão, temos:

$$\frac{n_x}{h} = \rho_x \cdot f_{sx} = \frac{a_{sx} \cdot f_{sx}}{s_x \cdot h} \quad \text{Equação 11}$$

$$\frac{n_y}{h} = \rho_y \cdot f_{sy} = \frac{a_{sy} \cdot f_{sy}}{s_y \cdot h} \quad \text{Equação 12}$$

Assim,

$$\sigma_x = \frac{a_{sx}}{s_x \cdot h}$$

$$\sigma_y = \frac{a_{sy}}{s_y \cdot h}$$

Dividindo-se as equações 8, 9 e 10 por h e substituindo-se as equações 11 e 12:

$$\rho_x \cdot f_{sx} = \tau_{xy} \cdot \cot \theta' \quad \text{Equação 13}$$

$$\rho_y \cdot f_{sy} = \tau_{xy} \cdot \tan \theta' \quad \text{Equação 14}$$

$$\sigma_d = \tau_{xy} \cdot \frac{1}{\cos \theta' \cdot \sin \theta'} = \tau_{xy} \cdot (\tan \theta' + \cot \theta') \quad \text{Equação 15}$$

Dessa forma,

$$\tau_x; \tau_y = \frac{q_y}{h}$$

Expressando as equações 13, 14 e 15 em função da tensão σ_d :

$$\rho_x \cdot f_{sx} = \sigma_d \cdot \cos^2 \theta' \quad \text{Equação 16}$$

$$\rho_y \cdot f_{sy} = \sigma_d \cdot \text{sen}^2 \theta' \quad \text{Equação 17}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_d \cdot \cos \theta' \cdot \text{sen} \theta' \quad \text{Equação 18}$$

Somando-se as equações 16 e 17 e observando que $\text{sen}^2 + \cos^2 = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \rho_x \cdot f_{sx} + \rho_y \cdot f_{sy} &= \sigma_d \cdot \text{sen}^2 \theta' + \sigma_d \cdot \cos^2 \theta' \\ \rho_x \cdot f_{sx} + \rho_y \cdot f_{sy} &= \sigma_d \end{aligned} \quad \text{Equação 19}$$

Condição balanceada: $f_{sx} = f_{sy}$ e $\sigma_d = \xi \cdot f_{ck}$, logo:

$$\rho_x \cdot f_{sx} + \rho_y \cdot f_{sy} = \xi \cdot f_{ck} \quad \text{Equação 20}$$

Em que:

$$\xi \cdot f_{ck} = \text{tensão efetiva.}$$

Dividindo a equação 20 por $\xi \cdot f_{ck}$:

$$\omega_x + \omega_y = 1$$

$$\text{Sabendo que: } \omega_x = \frac{\rho_x \cdot f_{sx}}{\xi \cdot f_{ck}} \text{ e } \omega_y = \frac{\rho_y \cdot f_{sy}}{\xi \cdot f_{ck}}.$$

A “condição balanceada” de elementos submetidos a cisalhamento puro pode ocorrer em três situações:

$$\text{Condição Balanceada} \quad \omega_x + \omega_y = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_x = \omega_y \text{ (Caso I)} \\ \theta' = 45^\circ \\ \omega_y < 0,5 \text{ (Caso II)} \\ \theta' < 45^\circ \\ \omega_x < 0,5 \text{ (Caso III)} \\ \theta' < 45^\circ \end{array} \right.$$

Caso I: o escoamento das armaduras (longitudinal e transversal) acontece simultaneamente ao esmagamento do concreto.

Caso II: a armadura transversal escoar primeiramente e a armadura longitudinal escoar simultaneamente ao esmagamento do concreto.

Caso III: a armadura longitudinal escoar primeiramente e a armadura transversal escoar simultaneamente ao esmagamento do concreto.

Quando $\omega_x + \omega_y < 1,0$, diz-se que o elemento é subarmado, pois as armaduras longitudinal e transversal escoaram antes do esmagamento do concreto.

Quando $\omega_x + \omega_y > 1,0$, diz-se que o elemento é superarmado, pois ocorre o esmagamento do concreto anteriormente ao escoamento das armaduras longitudinal e transversal. Este tipo de elemento não é utilizado, uma vez que apresenta comportamento frágil de estrutura.

3.1.2.1 Armaduras mínimas

Anteriormente a fissuração do concreto, o elemento submetido a cisalhamento puro (τ_{xy}) produzirá uma tensão de tração (σ_1) igual em magnitude, com uma inclinação de 45° .

Conforme recomendado no item 8.2.5 da NBR 6118 (2014), quando ocorre fissuração, σ_1 pode ser assumida como a resistência à compressão do concreto f_{ctm} .

Assumindo o escoamento do aço $f_{sx} = f_{sy} = f_{yy}$, a armadura total necessária será:

$$f_{yy} \cdot (\rho_x + \rho_y) = \frac{f_{ctm}}{0,5} \quad \text{Equação 21}$$

A Tabela 1 apresenta as taxas mínimas para diferentes resistências do concreto. Considerou-se $f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}$ e $f_{yy} = 500 \text{ MPa}$.

Tabela 1: Taxa de armadura mínima por direção para elementos sob cisalhamento.

Concreto (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
ρ_{min} (%)	0,44	0,51	0,58	0,64	0,70	0,76	0,81

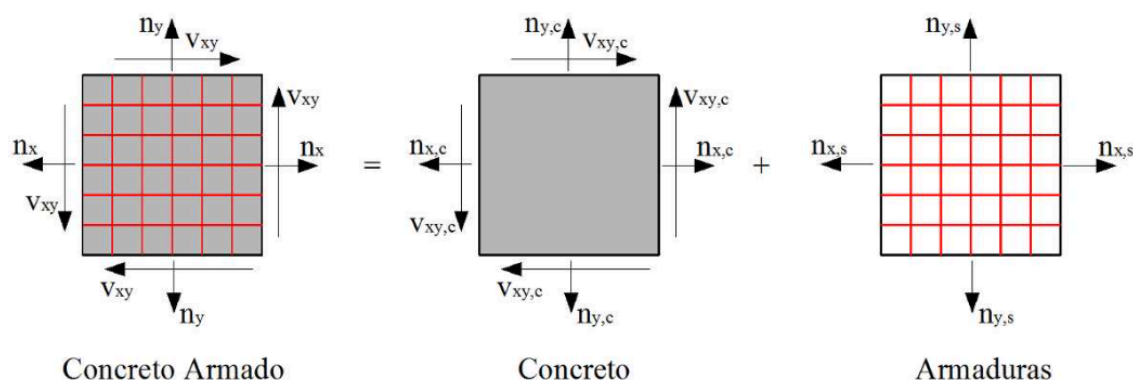
Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.70)

A NBR6118 (2003) recomenda uma taxa de 0,10% para armadura de pele em cada face (item 17.3.5.2.3).

3.1.3 Elementos de membrana sujeitos a forças normais e cisalhamento

A Figura 6 apresenta um elemento de membrana. O elemento está submetido a forças normais e cortantes no plano por unidade de comprimento (KN/m).

Figura 6: Elemento de concreto armado sujeito a esforços de membrana.



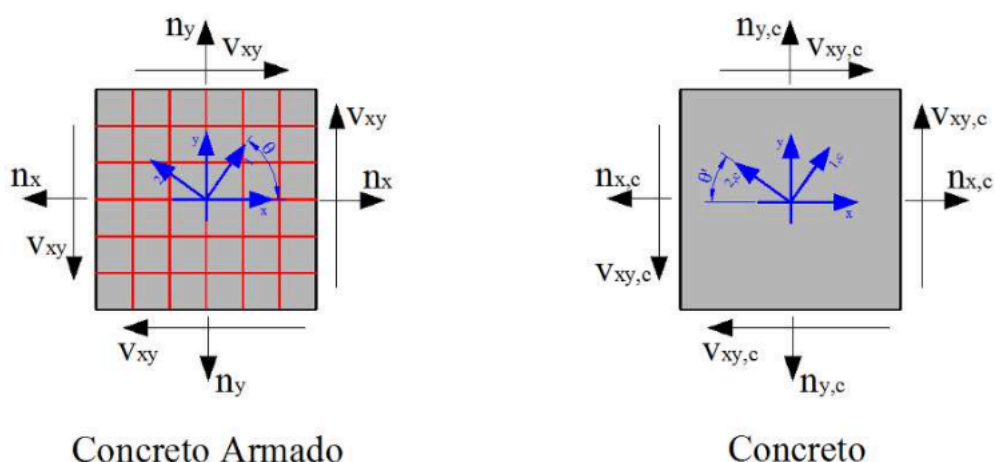
Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.71)

Como pode ser observado, atribui-se que no elemento de concreto armado, o concreto seja responsável por resistir às tensões normais de compressão e de cisalhamento, ao mesmo tempo que o aço resiste apenas às tensões normais de

tração. Na discussão dos resultados, a contribuição do concreto e da armadura para resistir aos esforços será discutida e analisada mais profundamente.

A Figura 7 apresenta os ângulos das tensões principais para o elemento em concreto armado e em concreto simples.

Figura 7: Ângulos das tensões principais em elemento de concreto armado e elemento de concreto simples.



Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.71)

Para o concreto armado, as tensões principais de compressão formam um ângulo $(90^\circ - \theta)$ com o eixo horizontal x .

Para o concreto simples, as tensões principais de compressão formam um ângulo θ' com o eixo horizontal x .

Diz-se que o ângulo θ é “Fixed angle” quando as tensões aplicadas aumentam proporcionalmente, não havendo mudança no ângulo.

Diz-se que o ângulo θ é “rotating angle” quando há quantidades diferentes de armaduras, ocasionando uma rotação do ângulo com o aumento do carregamento.

A partir dos carregamentos ao qual o elemento de membrana será submetido, existem quatro casos de reação do mesmo:

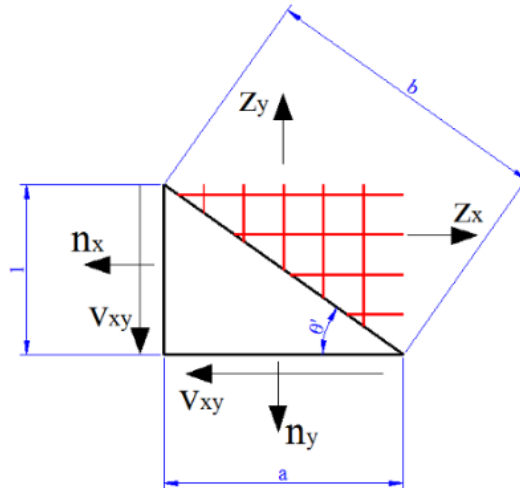
- Caso I: tração das armaduras nas direções X e Y ;

- Caso II: tração das armaduras apenas na direção Y e compressão na direção X;
- Caso III: tração das armaduras apenas na direção X e compressão na direção Y;
- Caso IV: compressão nas direções X e Y.

3.1.3.1 Caso de carregamento I

As Figuras 8 e 9 ilustram os esforços atuantes em um elemento com comprimento unitário ao longo da face vertical.

Figura 8: Determinação da resultante de tração nas armaduras da direção X (Caso I).



Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.73)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{1}{a} \rightarrow a = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{1}{b} \rightarrow b = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \end{aligned}$$

Efetutando-se o equilíbrio das forças horizontais, tem-se:

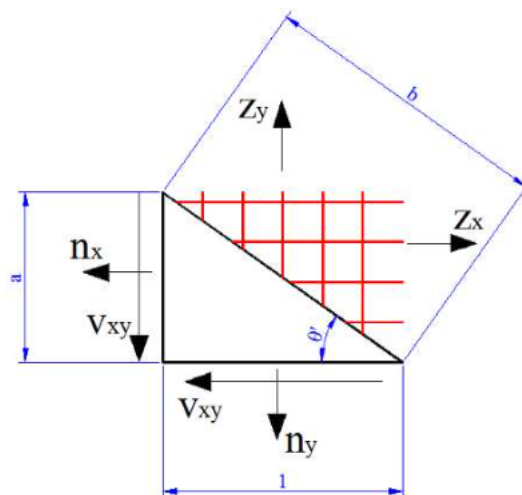
$$\sum F_x = 0$$

$$Z_x \cdot 1 = n_x \cdot 1 + V_{xy} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$$

$$Z_x = n_x + \frac{V_{xy}}{\operatorname{tg} \theta}$$

Equação 22

Figura 9: Determinação da resultante de tração nas armaduras da direção Y (Caso I).



Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.73)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{1} \rightarrow a = \operatorname{tg} \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{b} \rightarrow b = \frac{1}{\cos \theta}$$

Efetutando-se o equilíbrio das forças verticais, tem-se:

$$\sum F_y = 0$$

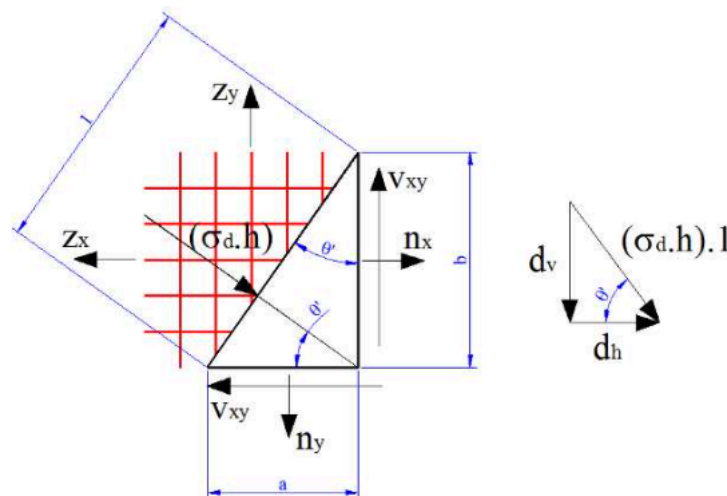
$$Z_y \cdot 1 = n_y \cdot 1 + V_{xy} \cdot \operatorname{tg} \theta$$

$$Z_y = n_y + V_{xy} \cdot \operatorname{tg} \theta$$

Equação 23

Para o cálculo da compressão diagonal atuante no concreto para o Caso I, considera-se a Figura 10.

Figura 10: Determinação da compressão diagonal no concreto (Caso I).



Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.74)

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{a}{1} \rightarrow a = \operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{b}{1} \rightarrow b = \operatorname{cos} \theta$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{d_h}{\sigma_c \cdot h \cdot 1} \rightarrow d_h = \sigma_c \cdot h \cdot 1 \cdot \operatorname{cos} \theta$$

Efetuada-se o equilíbrio de forças horizontais, tem-se:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sigma_c \cdot h \cdot 1 \cdot \operatorname{cos} \theta + n_x \cdot \operatorname{cos} \theta = Z_x \cdot \operatorname{cos} \theta + V_{xy} \cdot \operatorname{sen} \theta$$

Equação 24

Dividindo-se a Equação 24 por $\cos\theta$ e assumindo o valor de Z_x da Equação 22, tem-se:

$$\begin{aligned}\sigma_c \cdot h + n_x &= Z_x + V_{xy} \cdot tg\theta \\ \sigma_c \cdot h + n_x &= n_x + \frac{V_{xy}}{tg\theta} + V_{xy} \cdot tg\theta \\ \sigma_c \cdot h &= \frac{V_{xy}}{\sin\theta \cdot \cos\theta} = \frac{V_{xy} \cdot (1 + tg^2\theta)}{tg\theta} = R_c\end{aligned}\quad \text{Equação 25}$$

No caso I, o ângulo pode variar de 15° a 75° , sendo que $\theta = 45^\circ$ leva à obtenção da menor quantidade de armação.

3.1.3.2 Caso de carregamento II

Neste caso, $n_x < 0$ e $|n_x| > |V_{xy}|$. Para que não haja a necessidade de armaduras na direção X, a força de cisalhamento atuante (em módulo) deve ser menor do que a força normal de compressão em X.

Assumindo-se $Z_x = 0$ na Equação 22, tem-se:

$$tg\theta = \frac{-V_{xy}}{n_x}\quad \text{Equação 26}$$

Substituindo-se a Equação 26 na Equação 23:

$$\begin{aligned}Z_y &= n_y + V_{xy} \cdot \left(\frac{-V_{xy}}{n_x} \right) \\ Z_y &= n_y - \frac{V_{xy}^2}{n_x}\end{aligned}\quad \text{Equação 27}$$

Substituindo a Equação 26 na Equação 25:

$$\sigma_c \cdot h = \frac{V_{xy} \cdot (1 + tg^2 \theta)}{\left(-\frac{V_{xy}}{n_x}\right)} = -n_x - \frac{V_{xy}^2}{n_x} = R_c \quad \text{Equação 28}$$

3.1.3.3 Caso de carregamento III

Neste caso, $n_y < 0$ e $|n_y| > |V_{xy}|$. Para que não haja a necessidade de armaduras na direção Y, a força de cisalhamento atuante (em módulo) deve ser menor do que a força normal de compressão em Y.

Assumindo-se $Z_y = 0$ na Equação 23, tem-se:

$$tg \theta = \frac{-n_y}{V_{xy}} \quad \text{Equação 29}$$

Substituindo a Equação 29 na Equação 22:

$$Z_x = n_x + \frac{V_{xy}}{\left(-\frac{n_y}{V_{xy}}\right)}$$

$$Z_x = n_x - \frac{V_{xy}^2}{n_y} \quad \text{Equação 30}$$

Substituindo a Equação 29 na Equação 25:

$$\sigma_c \cdot h = \frac{V_{xy} \cdot \left[1 + \left(-\frac{n_y}{V_{xy}}\right)^2\right]}{\left(-\frac{n_y}{V_{xy}}\right)}$$

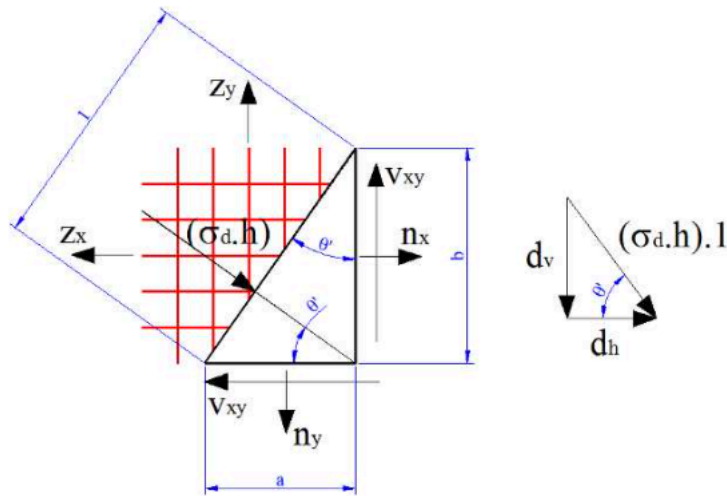
$$\sigma_c \cdot h = \frac{-V_{xy} \cdot \left[1 + \left(\frac{n_y}{V_{xy}}\right)^2\right]}{\left(\frac{n_y}{V_{xy}}\right)} = -n_y - \frac{V_{xy}^2}{n_y} = R_c \quad \text{Equação 31}$$

3.1.3.4 Caso de carregamento IV

Neste caso, $n_x < 0$, $|n_x| > |V_{xy}|$, $n_y < 0$ e $|n_y| > |V_{xy}|$. Se as forças de cisalhamento forem menores (em módulo) do que forças normais, não há necessidade de armaduras nas duas direções.

Para determinar o equilíbrio na situação de compressão biaxial, verifica-se a Figura 11:

Figura 11: Determinação da compressão diagonal no concreto (Caso IV).



Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.77)

$$\text{sen}\theta = \frac{a}{l} \rightarrow a = \text{sen}\theta \cdot l$$

$$\text{cos}\theta = \frac{b}{l} \rightarrow b = \text{cos}\theta \cdot l$$

$$\text{cos}\theta = \frac{d_h}{\sigma_c \cdot h \cdot l} \rightarrow d_h = \sigma_c \cdot h \cdot l \cdot \text{cos}\theta$$

$$\text{sen}\theta = \frac{d_v}{\sigma_c \cdot h \cdot l} \rightarrow d_v = \sigma_c \cdot h \cdot l \cdot \text{sen}\theta$$

Efetuada o equilíbrio de forças horizontais, tem-se:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sigma_c \cdot h \cdot 1 \cdot \cos\theta + n_x \cdot \cos\theta = Z_x \cdot \cos\theta + V_{xy} \cdot \sin\theta \quad \text{Equação 32}$$

Dividindo a equação 32 por $\cos\theta$, tem-se:

$$\sigma_c \cdot h + n_x = Z_x + V_{xy} \cdot \tan\theta$$

Com $Z_x = 0$:

$$\sigma_c \cdot h = -n_x + V_{xy} \cdot \tan\theta \quad \text{Equação 33}$$

Para o equilíbrio das forças verticais, tem-se:

$$\sum F_y = 0$$

$$-\sigma_c \cdot h \cdot 1 \cdot \sin\theta + n_y \cdot \sin\theta = -Z_y \cdot \sin\theta - V_{xy} \cdot \cos\theta \quad \text{Equação 34}$$

Dividindo-se a Equação 34 por $\sin\theta$, tem-se:

$$\sigma_c \cdot h + n_y = Z_y + \frac{V_{xy}}{\tan\theta} \quad \text{Equação 35}$$

Com $Z_y = 0$:

$$\sigma_c \cdot h = -n_y + \frac{V_{xy}}{\tan\theta} \quad \text{Equação 36}$$

Isolando $\tan\theta$ na Equação 33 e substituindo na Equação 36, tem-se:

$$\sigma_c \cdot h = -n_y + \frac{V_{xy}}{\left(\frac{\sigma_c \cdot h + n_x}{V_{xy}} \right)}$$

$$(\sigma_c \cdot h)^2 + \sigma_c \cdot h \cdot (n_x \cdot n_y) + (n_x \cdot n_y) - V_{xy}^2 = 0 \quad \text{Equação 37}$$

A equação 37 pode ser escrita, também, da seguinte forma:

$$\sigma_c \cdot h = \frac{-(n_x + n_y)}{2} \pm \sqrt{\frac{(n_x - n_y)^2}{4} + V_{xy}^2} = R_c \quad \text{Equação 38}$$

3.1.3.5 Equações de equilíbrio alternativas

As equações apresentadas anteriormente podem ser escritas de diferentes maneiras, facilitando a análise e o dimensionamento dos elementos de membrana.

$$V_{xy} = R_c \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta \quad \text{Equação 39}$$

$$z_x = n_x + R_c \cdot \cos^2\theta \quad \text{Equação 40}$$

$$z_y = n_y + R_c \cdot \text{sen}^2\theta \quad \text{Equação 41}$$

$$\rho_x \cdot f_{sx} = \sigma_x + \frac{\tau_{xy}}{\text{tg}\theta} \quad \text{Equação 42}$$

$$\rho_x \cdot f_{sy} = \sigma_y + \tau_{xy} \cdot \text{tg}\theta \quad \text{Equação 43}$$

$$\sigma_c = \frac{\tau_{xy}}{\text{sen}\theta \cdot \cos\theta} \quad \text{Equação 44}$$

$$\rho_x \cdot f_{sx} = \sigma_x + \sigma_c \cdot \cos^2\theta \quad \text{Equação 45}$$

$$\rho_y \cdot f_{sy} = \sigma_y + \sigma_c \cdot \text{sen}^2\theta \quad \text{Equação 46}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_c \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\theta \quad \text{Equação 47}$$

A Tabela 2 apresenta um resumo das diversas equações para elementos de membrana em concreto armado.

Tabela 2: Resumo das equações para elementos de membrana em concreto armado.

<p>Caso I $n_x > 0$ e $n_y > 0$</p>	$z_x = n_x + \frac{v_{xy}}{\operatorname{tg} \theta'}$ $z_y = n_y + v_{xy} \operatorname{tg} \theta'$ $\sigma_c \cdot h = \frac{v_{xy}}{\operatorname{sen} \theta' \cos \theta'} = R_c$	$z_x = n_x + R_c \cdot \cos^2 \theta'$ $z_y = n_y + R_c \cdot \operatorname{sen}^2 \theta'$ $v_{xy} = R_c \cdot \operatorname{sen} \theta' \cos \theta'$	$\rho_x f_{sx} = \sigma_x + \frac{\tau_{xy}}{\operatorname{tg} \theta'}$ $\rho_y f_{sy} = \sigma_y + \tau_{xy} \operatorname{tg} \theta'$ $\sigma_c = \frac{\tau_{xy}}{\operatorname{sen} \theta' \cos \theta'}$	$\rho_x f_{sx} = \sigma_x + \sigma_c \cos^2 \theta'$ $\rho_y f_{sy} = \sigma_y + \sigma_c \operatorname{sen}^2 \theta'$ $\tau_{xy} = \sigma_c \operatorname{sen} \theta' \cos \theta'$
<p>Caso II $n_x < 0$ e $n_x > v_{xy}$</p>	$z_x = 0$ $\operatorname{tg} \theta' = \frac{-v_{xy}}{n_x}$ $z_y = n_y - \frac{v_{xy}^2}{n_x}$ $\sigma_c \cdot h = -n_x - \frac{v_{xy}^2}{n_x} = R_c$	$z_x = 0$ $\operatorname{tg} \theta' = \frac{-v_{xy}}{n_x}$ $z_y = n_y - \frac{(R_c \cdot \operatorname{sen} \theta' \cdot \cos \theta')^2}{n_x}$	$\rho_x f_{sx} = 0$ $\operatorname{tg} \theta' = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_x}$ $\rho_y f_{sy} = \sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{(-\sigma_x)}$	$\rho_x f_{sx} = 0$ $\operatorname{tg} \theta' = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_x}$ $\rho_y f_{sy} = \sigma_y + \frac{(\sigma_c \operatorname{sen} \theta' \cos \theta')^2}{(-\sigma_x)}$
<p>Caso III $n_y < 0$ e $n_y > v_{xy}$</p>	$z_y = 0$ $\operatorname{tg} \theta' = \frac{-n_y}{v_{xy}}$ $z_x = n_x - \frac{v_{xy}^2}{n_y}$ $\sigma_c \cdot h = -n_y - \frac{v_{xy}^2}{n_y} = R_c$	$z_y = 0$ $\operatorname{tg} \theta' = \frac{-n_y}{v_{xy}}$ $z_x = n_x - \frac{(R_c \cdot \operatorname{sen} \theta' \cdot \cos \theta')^2}{n_y}$	$\rho_y f_{sy} = 0$ $\operatorname{tg} \theta' = \frac{-\sigma_y}{\tau_{xy}}$ $\rho_x f_{sx} = \sigma_x + \frac{\tau_{xy}^2}{(-\sigma_y)}$	$\rho_y f_{sy} = 0$ $\operatorname{tg} \theta' = \frac{-\sigma_y}{\tau_{xy}}$ $\rho_x f_{sx} = \sigma_x + \frac{(\sigma_c \operatorname{sen} \theta' \cos \theta')^2}{(-\sigma_y)}$
<p>Caso IV $n_x < 0, n_x > v_{xy} ,$ $n_y < 0$ e $n_y > v_{xy}$</p>	$z_x = 0 \quad z_y = 0$ $\sigma_c \cdot h = \frac{-(n_x + n_y)}{2} \pm \sqrt{\frac{(n_x - n_y)^2}{4} + v_{xy}^2} = R_c$	$z_x = 0 \quad z_y = 0$ $\sigma_c \cdot h = \frac{-(n_x + n_y)}{2} \pm \sqrt{\frac{(n_x - n_y)^2}{4} + v_{xy}^2} = R_c$	$\rho_x f_{sx} = 0 \quad \rho_y f_{sy} = 0$ $\sigma_c = \frac{-(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} = R_c$	$\rho_x f_{sx} = 0 \quad \rho_y f_{sy} = 0$ $\sigma_c = \frac{-(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} = R_c$

Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.82)

3.1.3.6 Armaduras e limite para tensão máxima de compressão

Após determinar as forças de tração Z_x e Z_y , a quantidade de armadura por unidade de largura será definida por:

$$A_{sx} = \frac{Z_{x,d}}{f_{yd}} = \frac{\gamma_f \cdot Z_x}{f_{yk} / \gamma_s} \quad \text{Equação 48}$$

$$A_{sy} = \frac{Z_{y,d}}{f_{yd}} = \frac{\gamma_f \cdot Z_y}{f_{yk} / \gamma_s} \quad \text{Equação 49}$$

De acordo com o CEB-FIP Model Code 1990 (1993), a máxima tensão de compressão atuante no concreto deve ser inferior às tensões apresentadas a seguir:

$$\sigma_c \leq 0,60 \cdot \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] \cdot f_{cd} = f_{cd2} \rightarrow \text{Para os casos I, II e III} \quad \text{Equação 50}$$

$$\sigma_c \leq K \cdot 0,85 \cdot \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] \cdot f_{cd} = K \cdot f_{cd2} \rightarrow \text{Para o caso IV} \quad \text{Equação 51}$$

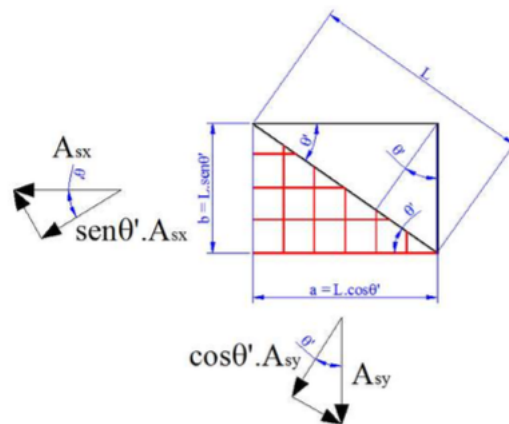
$$K = \frac{1+3,65 \cdot \alpha}{(1+\alpha)^2} \quad \text{Equação 52}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad \text{Equação 53}$$

3.1.3.7 Armaduras mínimas para elementos de membrana

Para elementos de membrana, as armaduras mínimas podem ser calculadas de acordo com Hoogenboom (1998). A Figura 12 ilustra o equilíbrio de membrana, levando em conta a resistência a tração do concreto no aparecimento da primeira fissura, para determinação das armaduras.

Figura 12: Determinação das armaduras mínimas em elementos de membrana.



Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.84)

$$\cos \theta = \frac{a}{L} \rightarrow a = L \cdot \cos \theta$$

$$\sen \theta = \frac{b}{L} \rightarrow b = L \cdot \sen \theta$$

As taxas de armadura nas direções X e Y são dadas por:

$$\rho_x = \frac{A_{sx}}{A_c} = \frac{A_{sx}}{L \cdot \sin\theta \cdot h} \quad \text{Equação 54}$$

$$\rho_y = \frac{A_{sy}}{A_c} = \frac{A_{sy}}{L \cdot \cos\theta \cdot h} \quad \text{Equação 55}$$

Dessa forma, assumindo que $\rho_x = \rho_y = \rho$, tem-se:

$$A_{sx} = \rho_x \cdot L \cdot \sin\theta \cdot h = \rho \cdot L \cdot \sin\theta \cdot h \quad \text{Equação 56}$$

$$A_{sy} = \rho_y \cdot L \cdot \cos\theta \cdot h = \rho \cdot L \cdot \cos\theta \cdot h \quad \text{Equação 57}$$

Assumindo que $A_s = A_{sx} + A_{sy}$, tem-se:

$$A_c = L \cdot h - A_s$$

$$A_c = L \cdot h - A_{sx} \cdot \sin\theta - A_{sy} \cdot \cos\theta$$

$$A_c = L \cdot h - \rho \cdot L \cdot h = L \cdot h \cdot (1 - \rho) \quad \text{Equação 58}$$

A partir do equilíbrio na região fissurada e substituindo as Equações 56, 57 e 58, obtém-se:

$$A_{sx} \cdot f_y \cdot \sin\theta + A_{sy} \cdot f_y \cdot \cos\theta = A_c \cdot f_{ctm} + A_{sx} \cdot \sigma_{sx} \cdot \sin\theta + A_{sy} \cdot \sigma_{sy} \cdot \cos\theta$$

$$\rho \cdot f_y = (1 - \rho) \cdot f_{ctm} + \rho \cdot (\sigma_{sx} \cdot \sin^2\theta + \sigma_{sy} \cdot \cos^2\theta) \quad \text{Equação 59}$$

Antes da fissuração $\varepsilon_c = \varepsilon_x = \varepsilon_y$, sendo a máxima tensão de tração $\varepsilon_c = \varepsilon_1 = \varepsilon_x = \varepsilon_y$, tem-se:

$$\rho \cdot f_y = (1 - \rho) \cdot f_{ctm} + \rho \cdot E_s \cdot (\varepsilon_x \cdot \sin^2\theta + \varepsilon_y \cdot \cos^2\theta)$$

$$\rho \cdot f_y = (1 - \rho) \cdot f_{ctm} + \rho \cdot E_s \cdot \varepsilon_1 \quad \text{Equação 60}$$

Sabendo que $\varepsilon_1 = \varepsilon_{cr} = f_{ctm}/E_c$, tem-se:

$$\rho \cdot f_y = (1 - \rho) \cdot f_{ctm} + \rho \cdot E_s \cdot \frac{f_{ctm}}{E_c}$$

$$\rho = \frac{E_c \cdot f_{ctm}}{E_c \cdot (f_y + f_{ctm}) - E_s \cdot f_{ctm}}$$

Equação 61

A Equação 61 fornece a armadura total em cada direção. A Tabela 3 apresenta as taxas mínimas para diferentes resistências do concreto. Considera-se $f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}$, $E_c = 5600 \cdot f_{ck}^{2/3}$, $E_s = 210 \text{ GPa}$ e $f_y = 500 \text{ MPa}$.

Tabela 3: Taxa de armadura mínima para elementos de membrana em cada direção.

Concreto (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
$\rho_{\min} (\%)$	0,46	0,53	0,60	0,66	0,73	0,79	0,84

Fonte: SOUZA, R. A. (2015, p.87)

A NBR6118 (2003) recomenda a taxa de 0,10% para armadura de pele em cada face (item 17.3.5.2.3).

3.2 Simulação

Neste trabalho utilizaremos a simulação de Monte Carlo. Portanto, é importante que, primeiramente, se introduza o significado de simulação.

De acordo com Chwif e Medina (2015) a simulação analisa cenários e prevê o comportamento de um sistema, baseado em dados de entradas específicos respeitando ideias iniciais.

Segundo Forrester (1968), um sistema nada mais é do que um conjunto de partes que juntas tem um objetivo em comum.

Portanto, um modelo de simulação procura repetir em um computador, o comportamento de diferentes variáveis aleatórias com as mesmas condições de contorno.

Assim, A simulação de Monte Carlo utiliza geradores de números aleatórios para simular sistemas físicos ou matemáticos, nos quais não se considera o tempo explicitamente como uma variável” (Chwif e Medina, 2015, pg. 06).

3.3 Confiabilidade Estrutural

Para garantir a segurança em um projeto estrutural, é necessário o estudo do comportamento das diferentes variáveis que fazem parte do sistema, como por exemplo, a distribuição de cargas na estrutura e a propriedade mecânica dos materiais.

O dimensionamento de estruturas pode ser feito de acordo com métodos determinísticos, semiprobabilísticos e probabilísticos.

No método determinístico, as variáveis são analisadas como determinísticas, adotando-se valores médios, Santos (2012). Devido à imprecisão do método, coeficientes de segurança são utilizados. Este modelo é representado por:

$$R = S \cdot \gamma_c \quad \text{Equação 62}$$

Onde:

R = Resistência;

S = Solicitação;

γ_c = Fator de segurança global.

No método semiprobabilístico, as variáveis são analisadas como determinísticas, adotando-se seus valores característicos e as ações são moderadas

para se chegar em combinações críticas, Santos (2012). Este modelo é representado por:

$$\frac{R}{\gamma_r} = \sum S_i \gamma_i \quad \text{Equação 63}$$

Onde:

R = Resistência;

γ_r = Coeficiente de minoração das resistências;

S = l-ésimo tipo de solicitação;

γ_i = Coeficiente de majoração i – ésima solicitação.

No método probabilístico, caso da confiabilidade estrutural, as incertezas são atribuídas às próprias variáveis, Santos (2012). A segurança é garantida quando a probabilidade de resistência é maior do que a de solicitação.

Utilizando confiabilidade estrutural é possível calcular a probabilidade de falha de uma estrutura. Ou seja, a possibilidade de uma estrutura não funcionar da maneira como foi projetada.

Assim, a confiabilidade estrutural pode ser representada por:

$$C = 1 - P_f \quad \text{Equação 64}$$

Onde:

C = Confiabilidade Estrutural;

P_f = Probabilidade de Falha.

Entende-se como falha, o colapso da estrutura (ELU) ou a interrupção no seu uso habitual (ELS), Moraes (2015).

Para análise de confiabilidade estrutural, modos de falha são determinados com o intuito de identificar as variáveis aleatórias que serão inseridas no problema. Com estas variáveis de projeto o vetor X é construído, sendo $X = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$.

Assim, a função de falha $G(X)$ define-se como:

$$G(X) = G(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0 \quad \text{Equação 65}$$

Portanto, quando $G(X) > 0$, a estrutura está segura. Quando $G(X) \leq 0$, ocorre a falha. Sendo que, $G(X) = 0$ caracteriza-se como superfície de falha.

Para que a estrutura tenha seu desempenho atendido como previsto em projeto, a função de falha deverá ser definida como:

$$G(X) = R(X) - S(X) \quad \text{Equação 66}$$

Onde:

$R(X)$ = Resistência do elemento;

$S(X)$ = Solicitação imposta ao elemento.

Dessa forma, a probabilidade de falha (p_f) define-se como:

$$P_f = P\{G(X) \leq 0\} \quad \text{Equação 67}$$

Esta função é utilizada para determinar a probabilidade de ocorrência da falha na estrutura. Podendo ser escrita como:

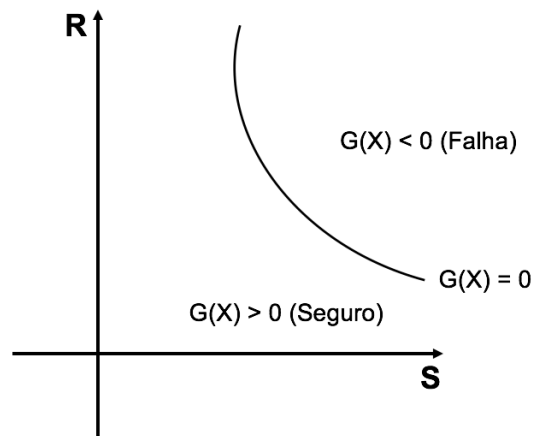
$$P_f = \int_{G(X) \leq 0} f(X) dx \quad \text{Equação 68}$$

Onde:

$f(X)$ = Função densidade de probabilidades conjunta das variáveis aleatórias no vetor X envolvidas no problema.

A Figura 13 ilustra o domínio de falha para duas variáveis aleatórias.

Figura 13: Definição do domínio de falha.



Fonte: Adaptado de MORAES (2015)

3.3.1 Índice de Confiabilidade

O índice de confiabilidade é utilizado como um valor de normalização para medir o nível de confiança da estrutura.

O problema básico na avaliação de confiabilidade ocorre por:

$$p_f = P[R \leq S] = P\{[R - S] \leq 0\} \quad \text{Equação 69}$$

Onde:

R = Resistência;

S = Solicitação.

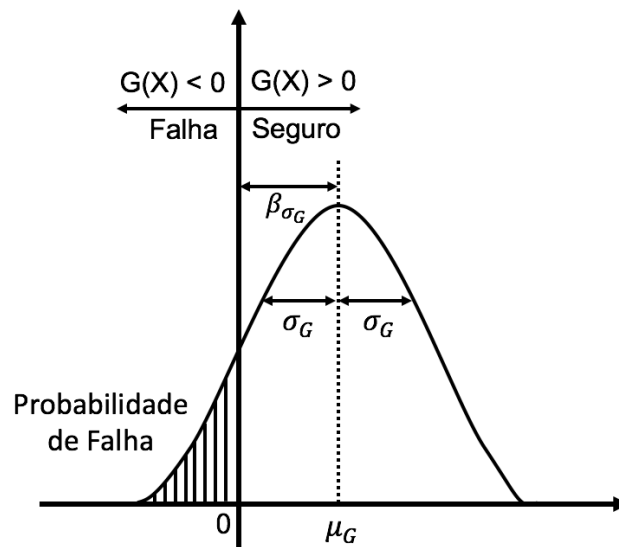
A probabilidade de falha pode ser representada pela integral da função de falha:

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^S f_{RS}(r, s) dr ds \quad \text{Equação 70}$$

onde $f_{rs}(r, s)$ é a função de densidade e probabilidade de R e S.

A Figura 14 ilustra a função densidade de probabilidade de margem de segurança:

Figura 14: Distribuição de margem de segurança.



Fonte: Adaptado de SOUZA (2011)

De acordo com Moraes (2015), “[...] o índice de confiabilidade β é a distância entre o valor médio da variável G (aleatória) e o ponto limite do estado de falha ($G=0$) medido em unidades de desvio padrão [...]”, podendo ser representado por:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2}} \quad \text{Equação 71}$$

Onde:

μ_R = Média da resistência;

μ_S = Média da solicitação;

σ_R = Desvio padrão da resistência;

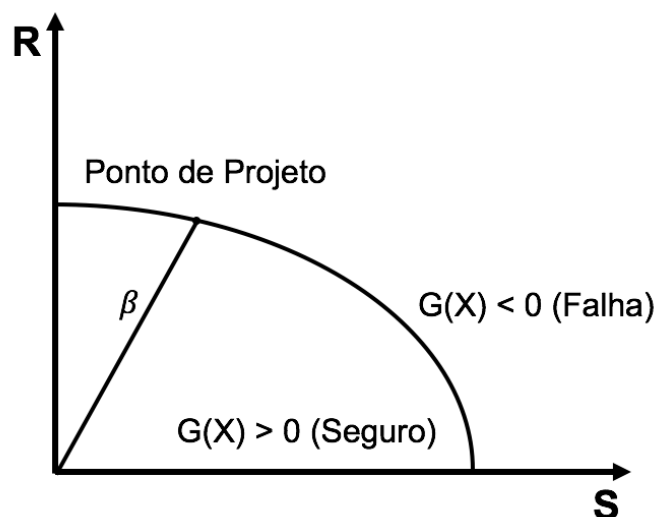
σ_S = Desvio padrão da solicitação.

De acordo com VERZENHASSI (2008), a partir de uma função de distribuição acumulada de variável normal padrão $\Phi(\cdot)$, com média nula e desvio padrão unitário, a probabilidade de falha para cada modo de falha será:

$$p_f = \Phi(-\beta) \quad \text{Equação 72}$$

A Figura 15 mostra uma representação geométrica do índice de confiabilidade β , como a distância entre o ponto de projeto e a origem.

Figura 15: Índice de confiabilidade e o ponto de projeto no espaço normal padrão.



Fonte: Adaptado de MORAES (2015)

A tabela 4 apresenta os valores que mostram a relação entre o índice confiabilidade e a probabilidade de falha.

Tabela 4: Relação entre β e p_f .

β	p_f
0,00	$0,500 \times 10^0$
0,50	$0,309 \times 10^0$
1,00	$0,159 \times 10^0$
1,50	$0,668 \times 10^{-1}$
2,00	$0,228 \times 10^{-1}$
2,50	$0,621 \times 10^{-2}$
3,00	$0,135 \times 10^{-2}$
3,50	$0,233 \times 10^{-3}$
4,00	$0,317 \times 10^{-3}$

Fonte: SOUZA, O. L. de C. (2011, p.94)

Os valores de β adotados neste trabalho variam entre 0,00 e 5,00, sendo referentes à maior probabilidade de falha e menor probabilidade de falha, respectivamente. O valor máximo adotado para o índice de confiabilidade ($\beta_{m\acute{a}x} = 5$), representa uma limitação de simulação devido a capacidade da memória do software.

3.4 Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo consiste em repetidos processos de simulação, gerando um conjunto de soluções correspondentes às variáveis aleatórias de entrada.

Este é um método que exige um número elevado de realizações para se chegar a valores precisos da probabilidade de falha. Dessa forma, é necessário o auxílio de programas computacionais para tornar viável a utilização do método.

No método, a função de falha $G(X)$ é testada N vezes, gerando um valor n referente à quantas vezes ocorre a falha.

Portanto,

$$p_f = \frac{n.[G(X)<0]}{N} \quad \text{Equação 73}$$

Onde $n.[G(X) < 0]$ aponta o número de vezes que a função de falha incidiu na região de falha.

O método considera a integração como um valor médio, alcançando-se uma estimativa central (média) do valor da integral pelos resultados independentes obtidos, Moraes (2015).

4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Os resultados a serem apresentados foram obtidos por meio de uma análise paramétrica baseada nas variáveis aleatórias apresentadas na Tabela 5.

Tabela 5: Variáveis aleatórias do problema.

	Variável Aleatória	Valores Médios (μ)	Desvio Padrão (σ)	Coefficiente de Variação (δ)	Tipo de Distribuição
Resistentes	f_c (MPa)	30	5,1	17 %	Lognormal
	f_y (Mpa)	500	25	5 %	Lognormal
	A_{sx} cm^2/m	[1,2 – 11,5]	-	-	Determinístico
	A_{sy} cm^2/m	[1,2 – 11,5]	-	-	Determinístico
	Espessura (m)	[0,08 – 0,20]	-	-	Determinístico
Solicitantes	Tensões ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$)**	*	-	-	Determinístico

* Variam para cada função de falha

** As tensões solicitantes são iguais as forças solicitantes:

$$\sigma_x = N_x$$

$$\sigma_y = N_y$$

$$\tau_{xy} = N_{xy}$$

Cada caso aborda diferentes parâmetros. Tensões solicitantes são aplicadas no elemento de membrana, variando-se a resistência média à compressão do concreto, resistência média à tração do aço, área das armaduras em X e Y e espessura do elemento.

Para análise dos modos de falha, um número de 1000000 de repetições de simulação foram realizados para cada parâmetro apresentado.

As funções de falha são calculadas de acordo com a equação 74.

$$G_i = R_i - S_i \quad \text{Equação 74}$$

A função de falha 1 (G_1), esmagamento do concreto, depende dos casos de carregamento citados 3.1.3.

Para os casos I, II e III:

$$f_{cmax} = 0,6 \cdot \left[\left(\frac{1-f_{ci}}{250} \right) \cdot f_{ci} \right] \quad \text{Equação 75}$$

Para o caso IV:

$$f_{cmax} = 0,85 \cdot \left[\left(\frac{1-f_{ci}}{250} \right) \cdot f_{ci} \right] \cdot k \quad \text{Equação 76}$$

Sendo que,

$$R = \frac{f_{cmax} \cdot h}{0,001} \quad \text{Equação 77}$$

A resistência do elemento referente a função de falha 2 (G_2), escoamento do aço na direção X, é representada pela equação 78.

$$R = A_{sx} \cdot f_{yi} \cdot 0,10 \quad \text{Equação 78}$$

A resistência do elemento referente a função de falha 3 (G_3), escoamento do aço na direção Y, é representada pela equação 79.

$$R = A_{sy} \cdot f_{yi} \cdot 0,10 \quad \text{Equação 79}$$

“A confiabilidade de sistemas estruturais é definida quando a falha de um elemento estrutural pode ocorrer devido a mais de uma função de estado limite ou de falha”, Pantoja (2012).

A falha do sistema pode ocorrer em série (quando um modo de falha ocasiona a falha do sistema) e em paralelo (quando o sistema falha apenas com a falha de todos os modos de falha. Os resultados serão analisados como sistemas em série.

Assim,

$$P_f^s = P[U_{i=1}^j(U \leq 0)] \quad \text{Equação 80}$$

Onde:

j = Número de modos de falha identificados;

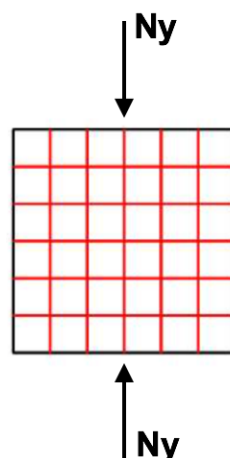
U = Vetor das variáveis normais padrão estaticamente independente.

Dessa forma, as funções de falha serão apresentadas em cada caso de carregamento a seguir.

As forças solicitantes utilizadas nos seguintes casos foram adotadas aleatoriamente, de forma que gerassem índices de confiabilidade dentro do intervalo de $0 \leq \beta \leq 5$.

4.1 Compressão em Y

Figura 16: Elemento de membrana submetido à forças normais de compressão em Y.



Dados:

$$A_{sx} = A_{sy} = 1.2 \text{ cm}^2/m$$

$$h_{inicial} = 0.08 \text{ m}$$

$$F_{ym} = 500 \text{ MPa}$$

$$n = 1000000$$

$$N_{xy} = 0 \text{ MPa}$$

$$N_y = -600; -700; -800 \text{ MPa}$$

Funções de falha:

$$G_1 = \left(\frac{f_{cmax} \cdot h}{0.001} \right) - \sigma_y \quad \text{Equação 81}$$

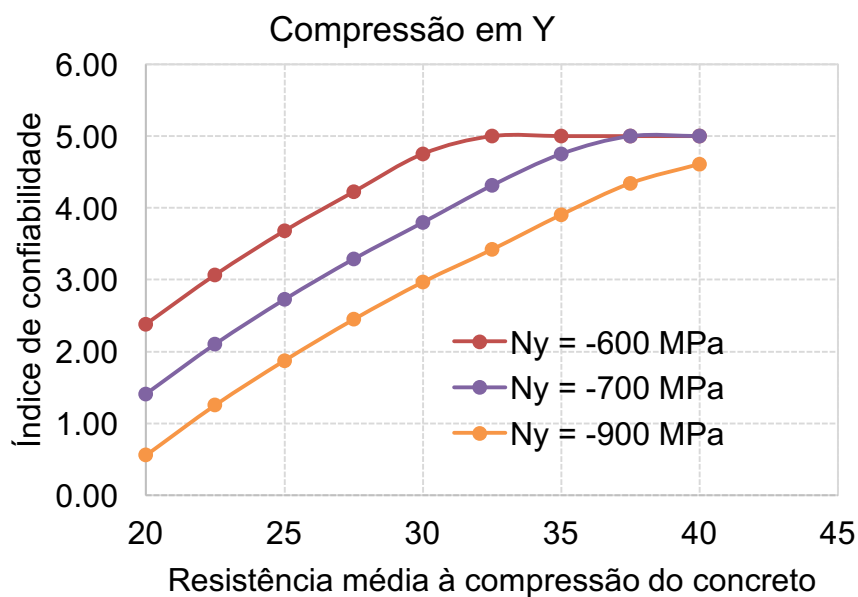
$$G_2 = (A_{sx} \cdot f_{yi} \cdot 0.10) - \sigma_y \quad \text{Equação 82}$$

$$G_3 = (A_{sy} \cdot f_{yi} \cdot 0.10) - \sigma_y \quad \text{Equação 83}$$

Quando um elemento de membrana está submetido apenas à forças de compressão em Y, somente o concreto contribui na resistência do elemento, não havendo influência das armaduras no modo de falha. Isso torna o modo de falha do sistema igual ao modo de falha de esmagamento do concreto.

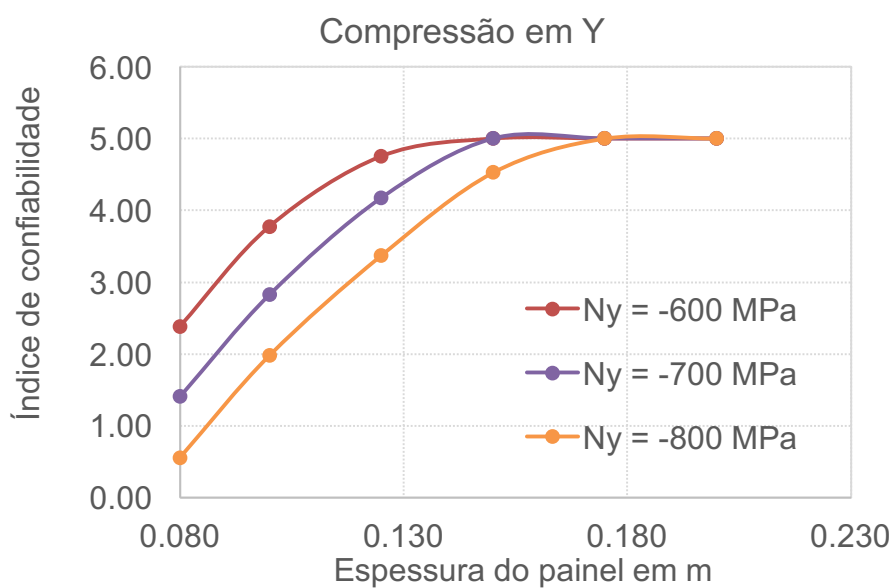
De acordo com o Gráfico 1, nota-se que o índice de confiabilidade (β) cresce com o aumento da resistência média à compressão do concreto. Porém, o β decresce com o aumento da força de compressão que o elemento for submetido. Por exemplo, quando o valor de $F_{cm} = 25 \text{ MPa}$, os valores do índice de confiabilidade são 3.71, 2.72 e 1.87 para os valores de $N_y = -600 \text{ MPa}$, $N_y = -700 \text{ MPa}$ e $N_y = -900 \text{ MPa}$, respectivamente.

Gráfico 1



De acordo com o Gráfico 2, nota-se que a espessura do painel também interfere no índice de confiabilidade (β). Portanto, quanto maior a espessura do painel, mais confiável o sistema se torna, uma vez que o modo de falha do sistema é igual ao modo de falha do concreto.

Gráfico 2



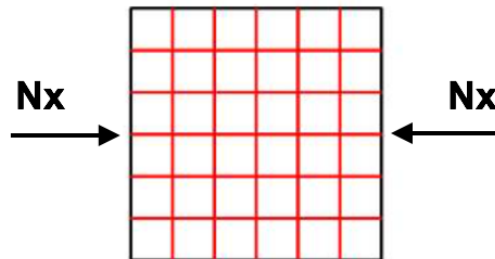
É importante ressaltar que o valor máximo adotado para o índice de confiabilidade ($\beta_{m\acute{a}x} = 5$), representa uma limitação de simulação devido a capacidade da memória do software.

Portanto, quando o elemento estiver sujeito à compressão apenas na direção Y, quanto mais resistente à compressão o concreto for, maior será a resistência do sistema como um todo. Da mesma forma, quanto menores forem as tensões atuantes no elemento, menor será a probabilidade de falha do sistema.

Essa análise é muito importante, pois possibilita ao engenheiro executar análises muito mais específica da estrutura, otimizando-a para um índice de confiabilidade ideal com uma menor resistência média à compressão do concreto ou espessura do painel.

4.2 Compressão em X

Figura 17: Elemento de membrana submetido à forças normais de compressão em X.



Dados:

$$A_{sx} = A_{sy} = 1.2 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$h_{inicial} = 0.08 \text{ m}$$

$$F_{ym} = 500 \text{ MPa}$$

$$n = 1000000$$

$$N_{xy} = 0 \text{ MPa}$$

$$N_x = -600; -700; -800 \text{ MPa}$$

Funções de falha:

$$G_1 = \left(\frac{f_{cmax} \cdot h}{0,001} \right) - \sigma_x \quad \text{Equação 84}$$

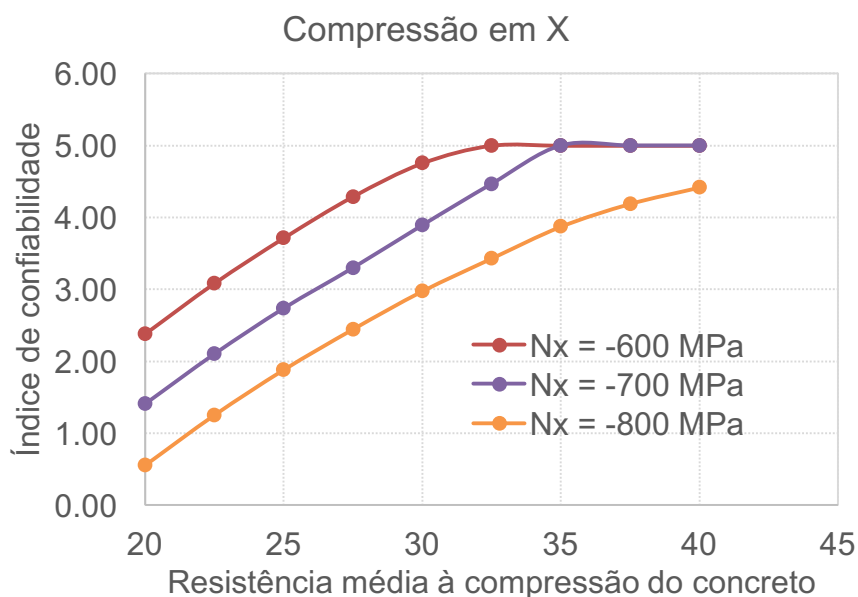
$$G_2 = (A_{sx} \cdot f_{yi} \cdot 0,10) - \sigma_x \quad \text{Equação 85}$$

$$G_3 = (A_{sy} \cdot f_{yi} \cdot 0,10) - \sigma_x \quad \text{Equação 86}$$

Quando o elemento de membrana está submetido apenas à forças de compressão em X, somente o concreto contribui na resistência do elemento, não havendo influência das armaduras no modo de falha. Isso torna o modo de falha do sistema igual ao modo de falha de esmagamento do concreto.

De acordo com o Gráfico 3, nota-se que o índice de confiabilidade (β) cresce com o aumento da resistência média à compressão do concreto ou com o aumento da espessura do painel. Porém, o β decresce com o aumento da força de compressão que o elemento for submetido. Por exemplo, quando o valor de $F_{cm} = 25 \text{ MPa}$, os valores do índice de confiabilidade são 3.71, 2.73 e 1.88 para os valores de $N_y = -600 \text{ MPa}$, $N_y = -700 \text{ MPa}$ e $N_y = -900 \text{ MPa}$, respectivamente.

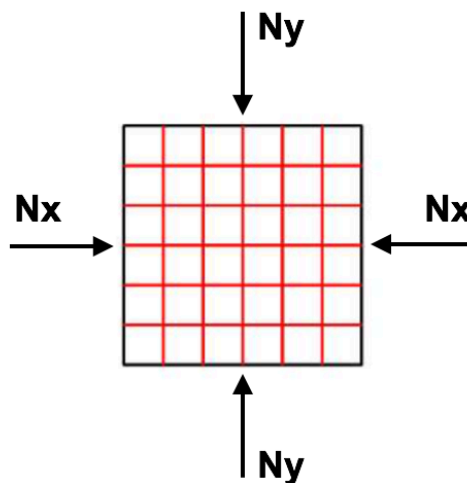
Gráfico 3



Portanto, quando o elemento estiver sujeito à compressão apenas na direção X, quanto mais resistente à compressão o concreto for, maior será a resistência do sistema como um todo. Da mesma forma, quanto menores forem as tensões atuantes no elemento, menor será a probabilidade de falha do sistema.

4.3 Compressão em X e Y

Figura 18: Elemento de membrana submetido à forças normais de compressão em X e Y.



Dados:

$$A_{sx} = A_{sy} = 1.2 \text{ cm}^2/m$$

$$h_{inicial} = 0.08 \text{ m}$$

$$F_{ym} = 500 \text{ MPa}$$

$$n = 1000000$$

$$N_{xy} = 0 \text{ MPa}$$

$$N_x = N_y = -1100; 1200; 1300 \text{ MPa}$$

Funções de falha:

$$G_1 = \left(\frac{f_{cmax} \cdot h}{0,001} \right) - (\sigma_x + \sigma_y)$$

Equação 87

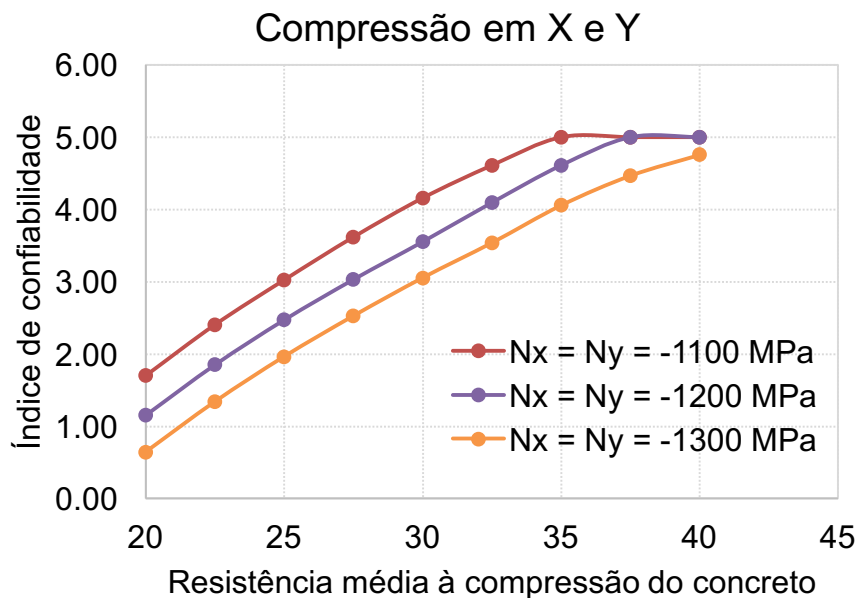
$$G_2 = (A_{sx} \cdot f_{yi} \cdot 0,10) - (\sigma_x + \sigma_y) \quad \text{Equação 88}$$

$$G_3 = (A_{sy} \cdot f_{yi} \cdot 0,10) - (\sigma_x + \sigma_y) \quad \text{Equação 89}$$

Quando o elemento de membrana está submetido à forças de compressão em X e Y, somente o concreto contribui na resistência do elemento, não havendo influência das armaduras no modo de falha. Isso torna o modo de falha do sistema igual ao modo de falha de esmagamento do concreto.

De acordo com o Gráfico 4, nota-se que o índice de confiabilidade (β) cresce com o aumento da resistência média à compressão do concreto ou com o aumento da espessura do painel. Porém, o β decresce com o aumento da força de compressão que o elemento for submetido. Por exemplo, quando o valor de $F_{cm} = 25 \text{ MPa}$, os valores do índice de confiabilidade são 3.03, 2.47 e 1.96 para os valores de $N_y = -600 \text{ MPa}$, $N_y = -700 \text{ MPa}$ e $N_y = -900 \text{ MPa}$, respectivamente.

Gráfico 4



Comparado com a análise de compressão na direção X ou Y, quando o concreto é comprimido nas duas direções (X e Y) ao mesmo tempo, ocorre o efeito de confinamento do concreto. Este efeito consiste no aumento da resistência do

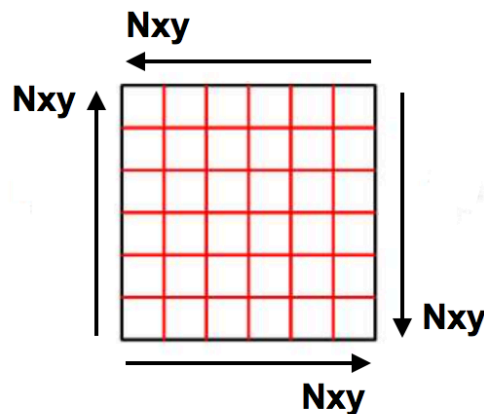
elemento de concreto. Isto pode ser observado com os aumentos significativos nas forças normais aplicadas para valores aproximados dos índices de confiabilidades quando o elemento é submetido apenas a esforços na direção X ou Y.

O efeito de confinamento é uma importante alternativa utilizada por engenheiros para aumentar a ductilidade de estruturas de concreto armado.

Portanto, quando o elemento estiver sujeito à compressão nas direções X e Y, quanto mais resistente à compressão o concreto for, maior será a resistência do sistema como um todo. Da mesma forma, quanto menores forem as tensões atuantes no elemento, menor será a probabilidade de falha do sistema.

4.4 Cisalhamento XY

Figura 19: Elemento de membrana submetido à força de cisalhamento.



Dados:

$$A_{sx} = A_{sy} = 9 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$h_{\text{inicial}} = 0.08 \text{ m}$$

$$F_{ym} = 500 \text{ MPa}$$

$$n = 1000000$$

$$N_{xy} = 370 \text{ MPa}$$

Funções de falha:

$$G_1 = \left(\frac{f_{cmax} \cdot h}{0,001} \right) - (\tau_{xy}) \quad \text{Equação 90}$$

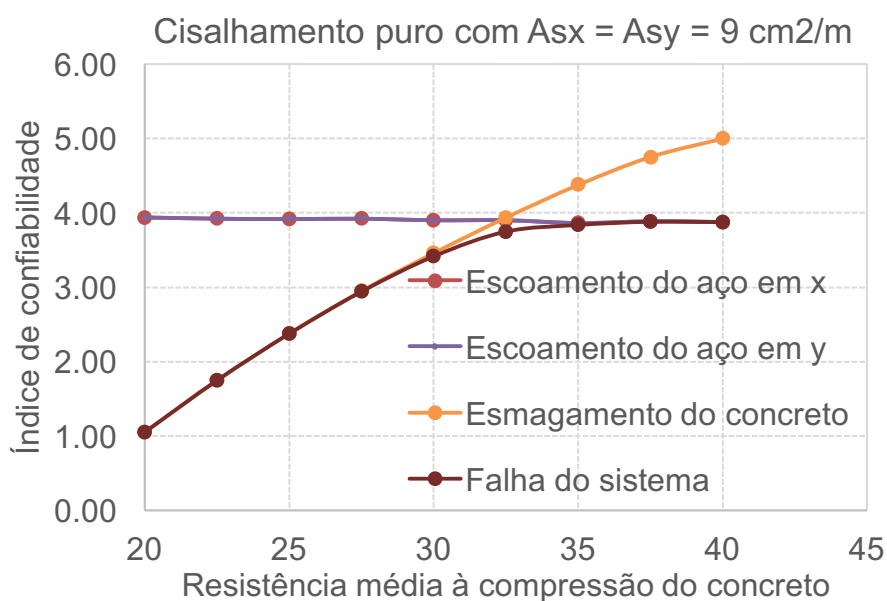
$$G_2 = (A_{sx} \cdot f_{yi} \cdot 0,10) - (\tau_{xy}) \quad \text{Equação 91}$$

$$G_3 = (A_{sy} \cdot f_{yi} \cdot 0,10) - (\tau_{xy}) \quad \text{Equação 92}$$

Quando o elemento de membrana está submetido à cisalhamento puro, tanto a armadura quanto o concreto contribuem para resistir aos esforços solicitantes. O modo de falha do sistema dependerá do modo de falha do concreto e do aço.

De acordo com os Gráfico 5, nota-se que até o concreto atingir a resistência média à compressão de aproximadamente 32,5 MPa, haverá o esmagamento do concreto. Portanto, o modo de falha do sistema será igual ao modo de falha do concreto, caracterizando-se como um elemento frágil. A partir deste valor ($F_{cm} \cong 32,5 \text{ MPa}$), o escoamento do aço nas duas direções (X e Y) ocorrerá anteriormente ao esmagamento do concreto, tornando a estrutura com aspecto dúctil. Nota-se que o índice de confiabilidade (β) cresce com o aumento da resistência média à compressão do concreto.

Gráfico 5



Portanto, quando o elemento estiver sujeito à cisalhamento simples, o elemento apresentará dois modos de falha diferentes. Inicialmente o elemento tem como modo de falha o esmagamento do concreto. Com o aumento da resistência média do concreto à compressão, o modo de falha passa a ser igual ao escoamento do aço nas duas direções. Assim sendo, o modo de falha do sistema coincidirá com modo de falha que houver a maior probabilidade de falha, sendo que quanto mais resistente à compressão o concreto for, maior será a resistência do sistema como um todo. Da mesma forma, quanto menores forem as tensões atuantes no elemento, menor será a probabilidade de falha do sistema.

Dados:

$$Asx = 7,5 \text{ cm}^2/m$$

$$Asy = 15 \text{ cm}^2/m$$

$$h_{inicial} = 0.08 \text{ m}$$

$$Fym = 500 \text{ MPa}$$

$$n = 1000000$$

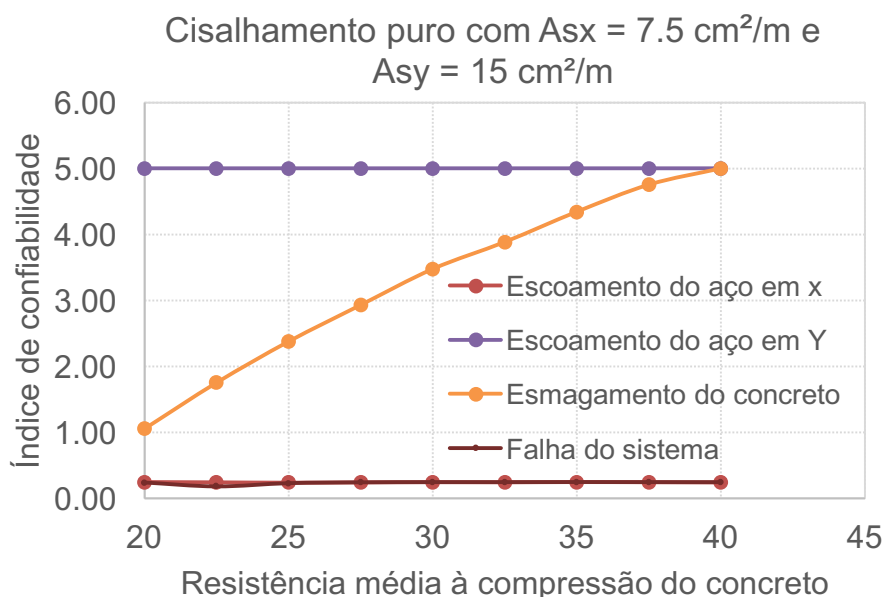
$$Nxy = 370 \text{ MPa}$$

Funções de falha: ver equações 90, 91 e 92.

Quando um elemento de membrana está submetido apenas à cisalhamento puro, mas apresenta diferentes áreas de armaduras transversais e longitudinais, o esperado seria que a resistência aos esforços solicitantes recaísse sobre a armadura que apresentasse menor área e o concreto.

De acordo com o Gráfico 6, nota-se que o modo de falha do sistema coincide com o modo de falha pelo escoamento do aço na direção X, não havendo interferência dos modos de falha pelo escoamento do aço em Y e/ou esmagamento do concreto.

Gráfico 6



Observa-se que o índice de confiabilidade do escoamento do aço em X é constante e com um valor muito baixo. Isso acontece pela grande diferença nos valores das áreas das armaduras nas direções X e Y ($A_{sx} = 7,5 \text{ cm}^2/\text{m}$ e $A_{sy} = 15 \text{ cm}^2/\text{m}$). Como a área da armadura na direção X é muito menor do que na direção Y, ela não consegue resistir aos esforços solicitantes. Independente do valor de resistência média à compressão do concreto, o modo de falha será sempre pelo escoamento do aço em X, sendo igual para o modo de falha do sistema. Conclui-se que este valor de área de armadura na direção X não é suficiente quando $N_{xy} = 370 \text{ MPa}$, ocasionando um valor insatisfatório de confiabilidade do elemento de membrana.

Dados:

$$A_{sx} = 8,5 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{sy} = 9 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$h_{inicial} = 0.08 \text{ m}$$

$$F_{ym} = 500 \text{ MPa}$$

$$n = 1000000$$

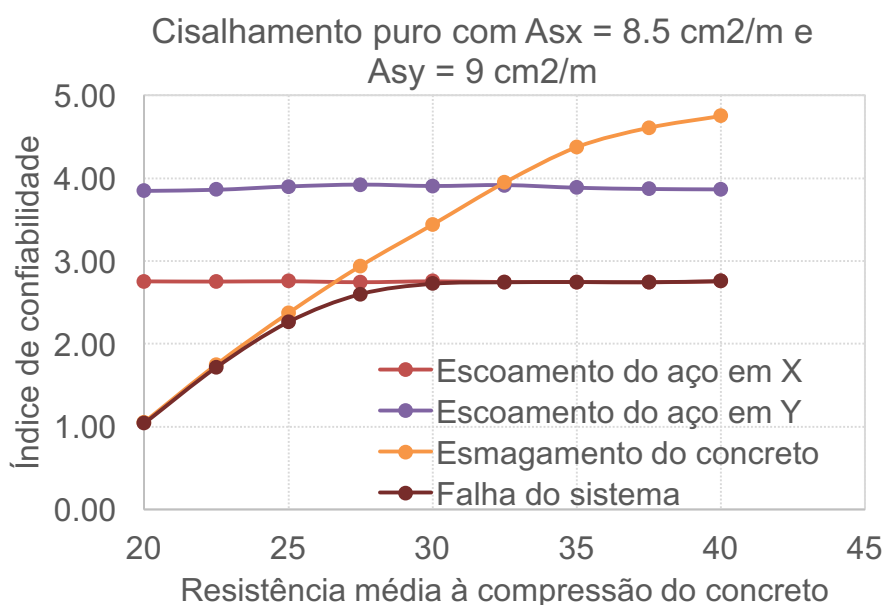
$$N_{xy} = 370 \text{ MPa}$$

Funções de falha: ver equações 90, 91 e 92.

Quando um elemento de membrana está submetido apenas à cisalhamento puro, mas apresenta diferentes áreas de armaduras transversais e longitudinais, o esperado seria que a resistência aos esforços solicitantes recaísse sobre a armadura que apresentasse menor área e o concreto.

De acordo com o Gráfico 7, nota-se que o modo de falha do sistema depende do modo de falha do concreto e do aço. Primeiramente o modo de falha será pelo esmagamento do concreto. A medida que aumenta a resistência média à compressão do concreto o modo de falha passa a ser pelo escoamento do aço em X.

Gráfico 7



Diferentemente da análise do Gráfico 6, nota-se que mesmo havendo diferença entre as áreas das armaduras nas direções X e Y ($A_{sx} = 8,5 \text{ cm}^2/\text{m}$ e $A_{sy} = 9 \text{ cm}^2/\text{m}$), o modo de falha não ocorre somente pelo escoamento do aço na direção com menor área de armadura. Isto ocorre, pois, a área do aço na direção X consegue resistir aos esforços solicitantes até um valor aproximado de $F_{cm} =$

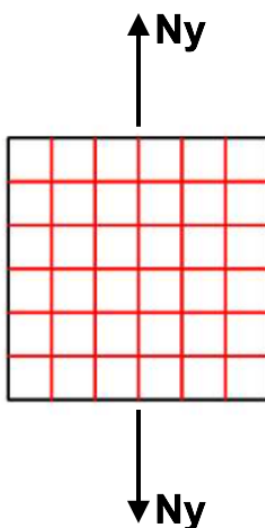
27,5 MPa, ocasionando um modo de falha pelo escoamento do concreto. A partir desse valor, o modo de falha passa a ser pelo escoamento do aço em X.

Como comentado anteriormente, é preferível que o modo de falha ocorra pelo escoamento do aço, pois assim o elemento apresentará um comportamento dúctil.

Portanto, o modo de falha do sistema coincidirá com modo de falha que houver a maior probabilidade de falha, sendo que quanto mais resistente à compressão o concreto for, maior será a resistência do sistema como um todo.

4.5 Tração em Y

Figura 20: Elemento de membrana submetido à forças normais de tração em Y.



Dados:

$$F_{cm} = 20 \text{ MPa}$$

$$h_{inicial} = 0.08 \text{ m}$$

$$F_{ym} = 500 \text{ MPa}$$

$$n = 1000000$$

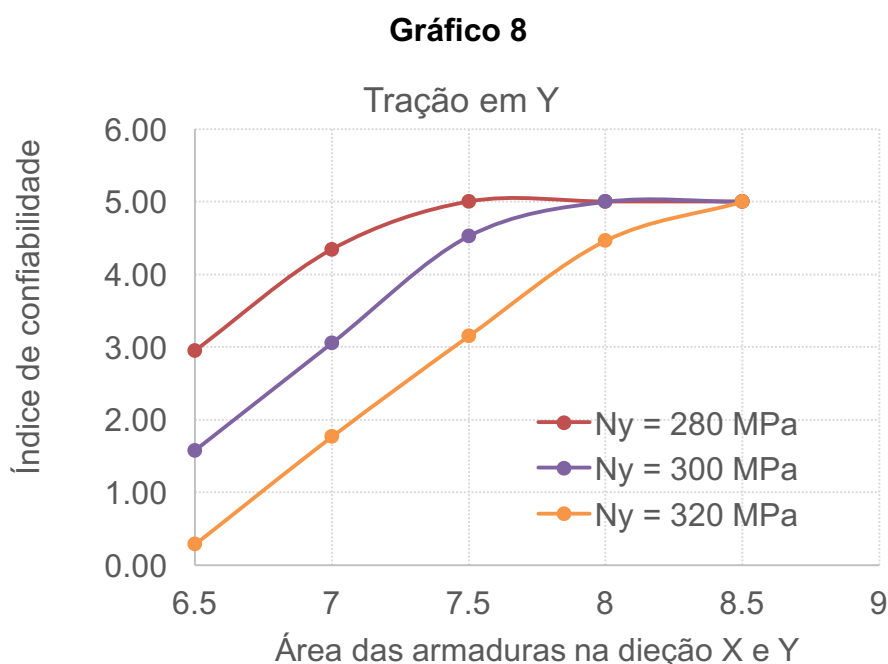
$$N_{xy} = 0 \text{ MPa}$$

$$N_y = 280; 300; 320 \text{ MPa}$$

Funções de falha: ver equações 81, 82 e 83.

Quando um elemento de membrana está submetido apenas à forças de tração em Y, apenas as armaduras contribuem na resistência do elemento, não havendo influência do concreto no modo de falha. Isso torna o modo de falha do sistema igual ao modo de falha do escoamento da armadura na direção do esforço solicitante.

De acordo com o Gráfico 8, nota-se que o índice de confiabilidade aumenta a medida que as armaduras em X e Y se tornam maiores, evidenciando que o concreto não influencia na resistência do elemento. Neste caso, como há tração somente em Y, somente a armadura na direção Y resistirá aos esforços solicitantes.



Portanto, quando o elemento estiver sujeito à tração apenas na direção Y, quanto maior a área da armadura, maior será a resistência do sistema como um todo. Da mesma forma, quanto menores forem as tensões atuantes no elemento, menor será a probabilidade de falha do sistema.

Dados:

$$Asx = Asy = 9,5 \text{ cm}^2/m$$

$$h_{inicial} = 0.08 \text{ m}$$

$$F_{ym} = 500 \text{ MPa}$$

$$n = 1000000$$

$$N_{xy} = 0 \text{ MPa}$$

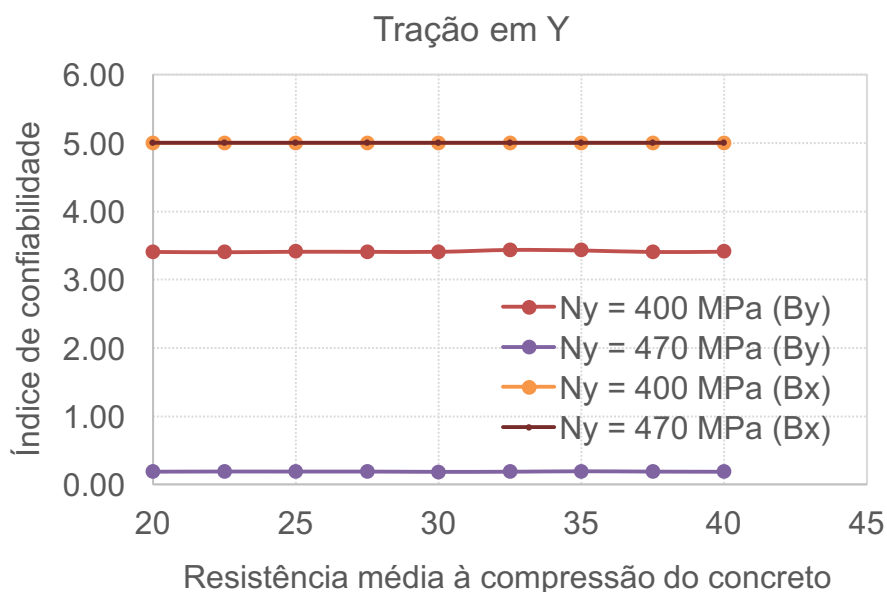
$$N_y = 400; 470 \text{ MPa}$$

Funções de falha: ver equações 81, 82 e 83.

Quando um elemento de membrana está submetido apenas à forças de tração em Y, apenas as armaduras contribuem na resistência do elemento, não havendo influência do concreto no modo de falha. Isso torna o modo de falha do sistema igual ao modo de falha do escoamento da armadura na direção do esforço solicitante.

De acordo com o Gráfico 9, nota-se que o índice de confiabilidade será constante com o aumento da resistência média à compressão do concreto, evidenciando que o concreto não influencia na resistência do elemento. Neste caso, como há tração somente em Y, somente a armadura na direção Y resistirá aos esforços solicitantes.

Gráfico 9

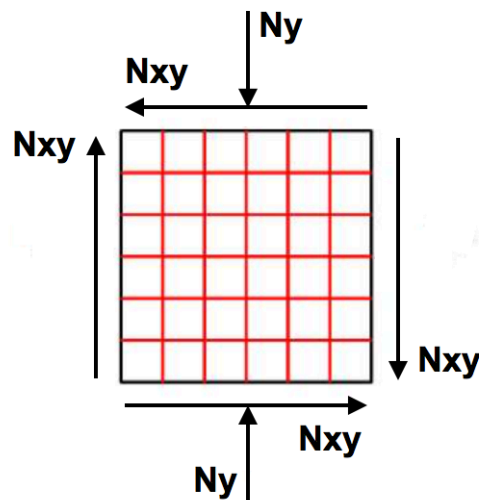


Nota-se que o índice de confiabilidade (β) aumenta com o acréscimo no valor das tensões atuantes. Quando $N_y = 470 \text{ MPa}$, o índice de confiabilidade é muito pequeno, evidenciando uma área de armadura na direção Y inadequada para resistir à esta tensão solicitante. Quando $N_y = 400 \text{ MPa}$, o índice de confiabilidade se mantém em um valor adequado, evidenciando que a estrutura possui um nível de confiabilidade alto.

Portanto, quando o elemento estiver sujeito à tração apenas na direção Y, quanto maior a área da armadura, maior será a resistência do sistema como um todo. Da mesma forma, quanto menores forem as tensões atuantes no elemento, menor será a probabilidade de falha do sistema.

4.6 Compressão em Y e cisalhamento

Figura 21: Elemento de membrana submetido à forças normais de compressão em X e cisalhamento.



Dados:

$$A_{sx} = A_{sy} = 9 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$h_{inicial} = 0.08 \text{ m}$$

$$F_{ym} = 500 \text{ MPa}$$

$$n = 1000000$$

$$N_{xy} = 400 \text{ MPa}$$

$$N_y = -300; -400; -500 \text{ MPa}$$

Funções de falha:

$$G_1 = \left(\frac{f_{cmax} \cdot h}{0,001} \right) - (\sigma_y + \tau_{xy}) \quad \text{Equação 93}$$

$$G_2 = (A_{sx} \cdot f_{yi} \cdot 0,10) - (\sigma_y + \tau_{xy}) \quad \text{Equação 94}$$

$$G_3 = (A_{sy} \cdot f_{yi} \cdot 0,10) - (\sigma_y + \tau_{xy}) \quad \text{Equação 95}$$

Quando um elemento de membrana está submetido à forças de compressão em Y e cisalhamento, tanto o concreto quanto o aço irão contribuir na resistência do elemento.

De acordo com o Gráfico 10 e 11, nota-se que quando a tensão normal de compressão for menor ou igual à tensão de cisalhamento ($N_y = -300 \text{ MPa}$ ou $N_y = -400 \text{ MPa}$ e $N_{xy} = 400 \text{ MPa}$), o modo de falha se inicia pelo esmagamento do concreto e a medida que a resistência média à compressão do concreto aumenta o modo de falha passa a ser pelo escoamento do aço na direção Y. A armadura em X não contribui na resistência dos sistemas.

Gráfico 10

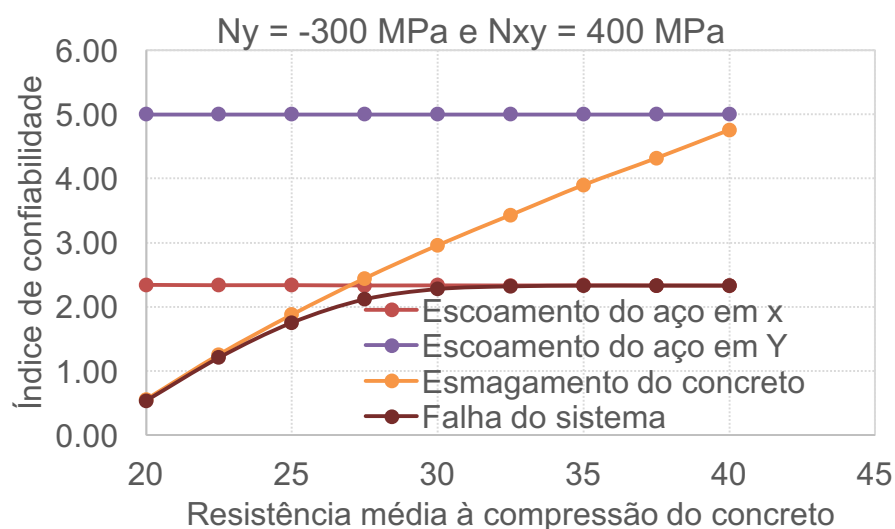
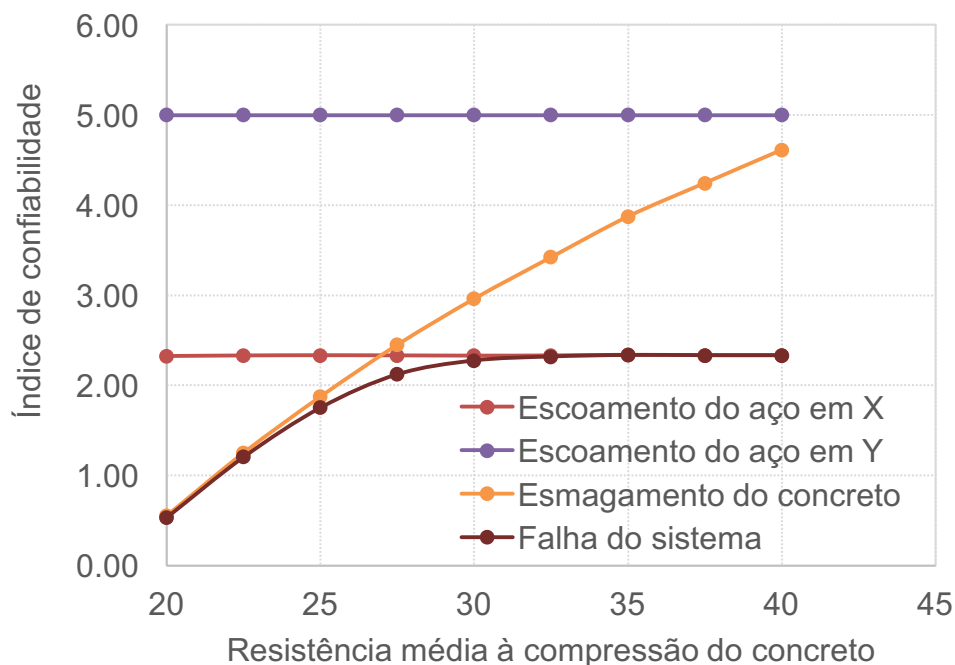


Gráfico 11

$N_y = -400 \text{ MPa}$ e $N_{xy} = 400 \text{ MPa}$

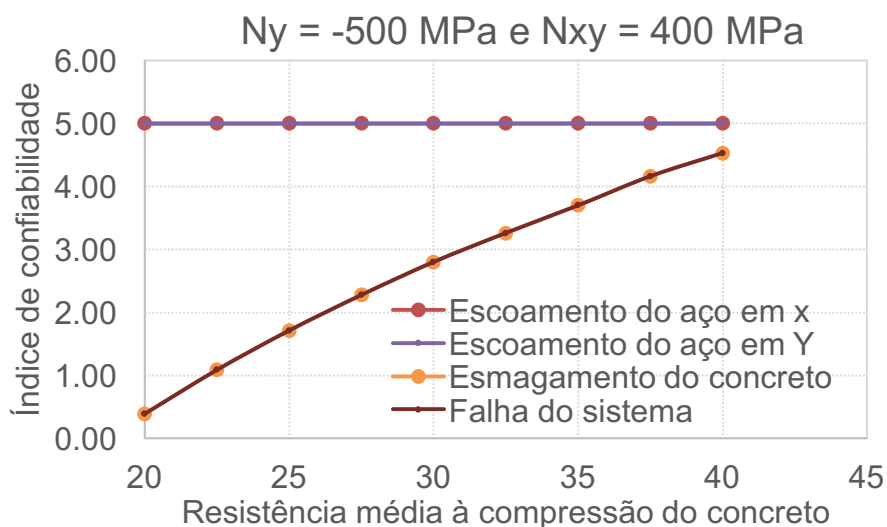


Nota-se que os gráficos permanecem praticamente iguais quando a tensão normal de compressão é menor ou igual a tensão de cisalhamento.

Portanto, a medida que aumenta a resistência média à compressão do concreto, o índice de confiabilidade do sistema se torna maior. A falha do sistema acontecerá de acordo com o modo de falha predominante. Nos casos dos gráficos 9 e 10, até um valor aproximado de $F_{cm} = 27,5 \text{ MPa}$ a falha do sistema se dá pelo modo de falha do esmagamento do concreto. Após este valor, o modo de falha do sistema se dá pelo modo de falha do esmagamento do aço em Y.

De acordo com o gráfico 12, nota-se que quando a tensão normal de compressão for maior que a tensão de cisalhamento ($N_y = -500 \text{ MPa}$ e $N_{xy} = 400 \text{ MPa}$), a falha do sistema será sempre igual ao modo de falha do esmagamento do concreto. As armaduras nas direções X e Y não contribuem na resistência do elemento.

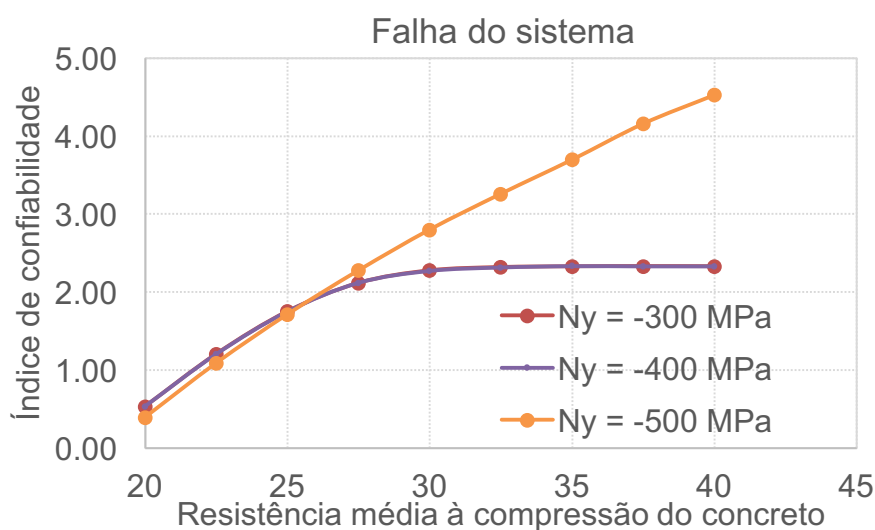
Gráfico 12



Portanto, à medida que a resistência média à compressão do concreto aumenta, o índice de confiabilidade do sistema se torna maior. Porém, como o modo de falha sempre ocorrerá pelo esmagamento do concreto, este elemento se caracteriza por ser um elemento frágil.

O gráfico 13 apresenta uma comparação do comportamento de falha dos sistemas apresentados nos gráficos 10, 11 e 12.

Gráfico 13

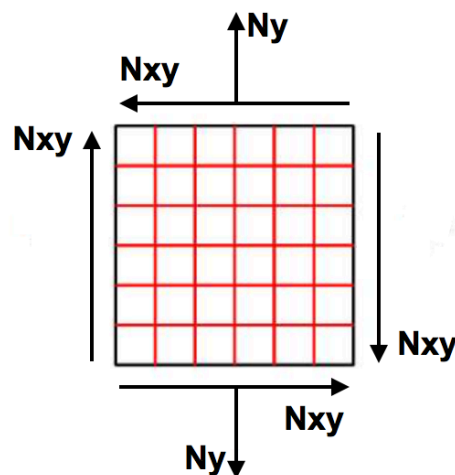


Nota-se que quando $N_y = -300$ e -400 MPa , o sistema se comporta da mesma maneira. Quando $N_y = -500 \text{ MPa}$, o sistema se inicia apresentando um índice de confiabilidade menor do que o dos outros sistemas, porém quando $F_{cm} = 40 \text{ MPa}$, o índice de confiabilidade deste sistema se torna muito maior do que os outros.

Portanto, apesar do sistema em laranja alcançar um índice de confiabilidade maior do que o dos outros sistemas, ele sempre se compreenderá por um elemento frágil, por ter como modo de falha o esmagamento do concreto. Os sistemas representados em vermelho e roxo, possuem inicialmente um comportamento frágil, porém a partir do valor aproximado de $F_{cm} = 27,5 \text{ MPa}$ o modo de falha passa a ser igual ao escoamento do aço em Y, tornando-o um elemento dúctil.

4.7 Tração em Y e cisalhamento

Figura 22: Elemento de membrana submetido à forças normais de tração em X e cisalhamento.



Dados:

$$A_{sx} = A_{sy} = 11,5 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$h_{inicial} = 0.08 \text{ m}$$

$$F_{ym} = 500 \text{ MPa}$$

$$n = 1000000$$

$$N_{xy} = 250 \text{ MPa}$$

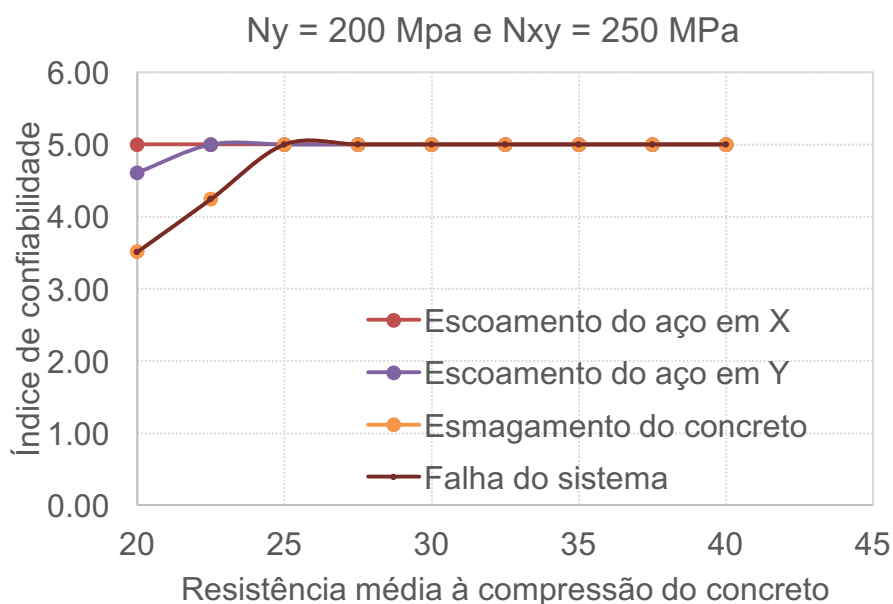
$$N_y = 200; 250; 300 \text{ MPa}$$

Funções de falha: Equações 93, 94 e 95.

Quando um elemento de membrana está submetido à forças de tração em Y e cisalhamento, tanto o concreto quanto o aço irão contribuir na resistência do elemento.

De acordo com o Gráfico 14, nota-se que quando a tensão normal de tração for menor ou igual à tensão de cisalhamento ($N_y = 200 \text{ MPa}$ e $N_{xy} = 250 \text{ MPa}$), o modo de falha se inicia pelo esmagamento do concreto e a medida que a resistência média à compressão do concreto aumenta, o a falha do sistema passa a ser igual para todos os modos de falha (esmagamento do concreto e escoamento do aço em X e Y).

Gráfico 14



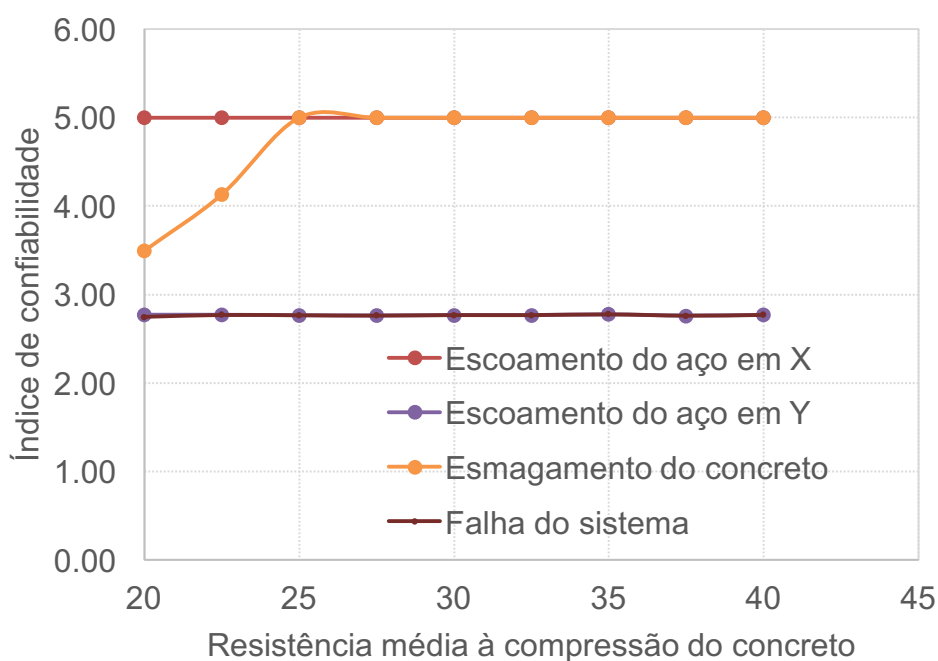
Portanto, este sistema apresenta índices de confiabilidade altos para todas as resistências à compressão do concreto. A partir de $F_{cm} = 30 \text{ MPa}$, o índice de confiabilidade se torna máximo para todos os modos de falha ($\beta = 5$).

É importante ressaltar que o valor máximo adotado para o índice de confiabilidade ($\beta_{\text{máx}} = 5$), representa uma limitação de simulação devido a capacidade da memória do software.

De acordo com o gráfico 15, nota-se que quando a tensão normal de tração for igual a tensão de cisalhamento, o modo de falha do sistema será pelo escoamento do aço em Y.

Gráfico 15

$N_y = 250 \text{ MPa}$ e $N_{xy} = 250 \text{ MPa}$

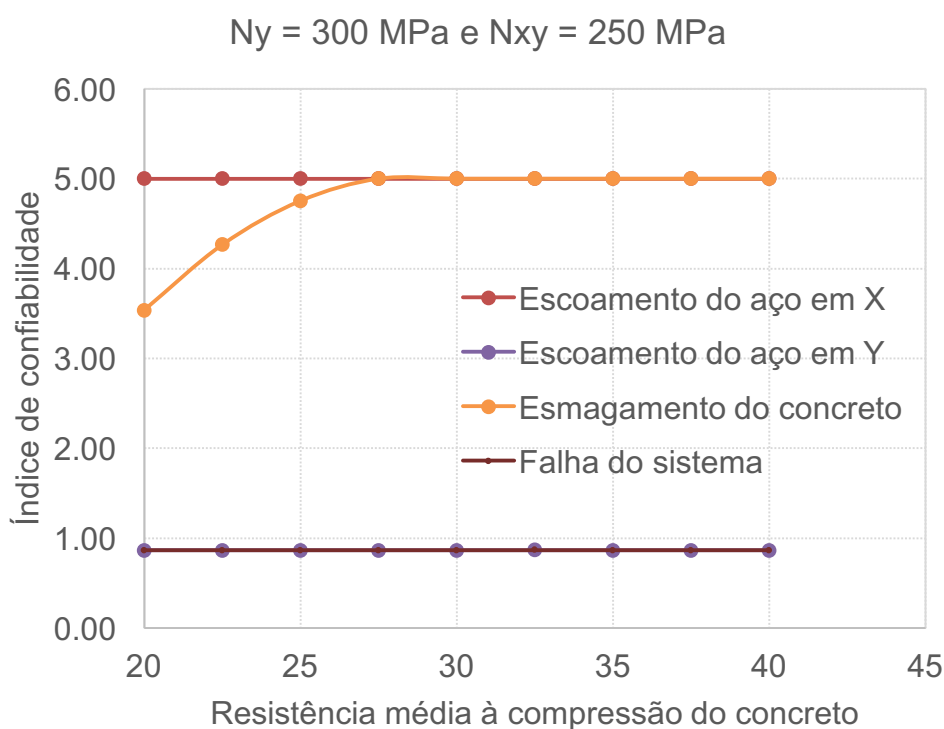


Nota-se que o índice de confiabilidade do escoamento do aço em Y se mantém constante para todos os valores de resistência média do concreto à compressão.

Portanto, este elemento apresenta um nível de confiabilidade bom, tendo a falha do sistema igual ao modo de falha do escoamento do aço na direção Y. Não há, assim, contribuição do concreto e da armadura na direção X para resistência na resistência do elemento.

De acordo com o gráfico 16, quando a tensão normal de tração for maior do que a tensão de cisalhamento, a falha do sistema será pelo escoamento do aço na direção Y.

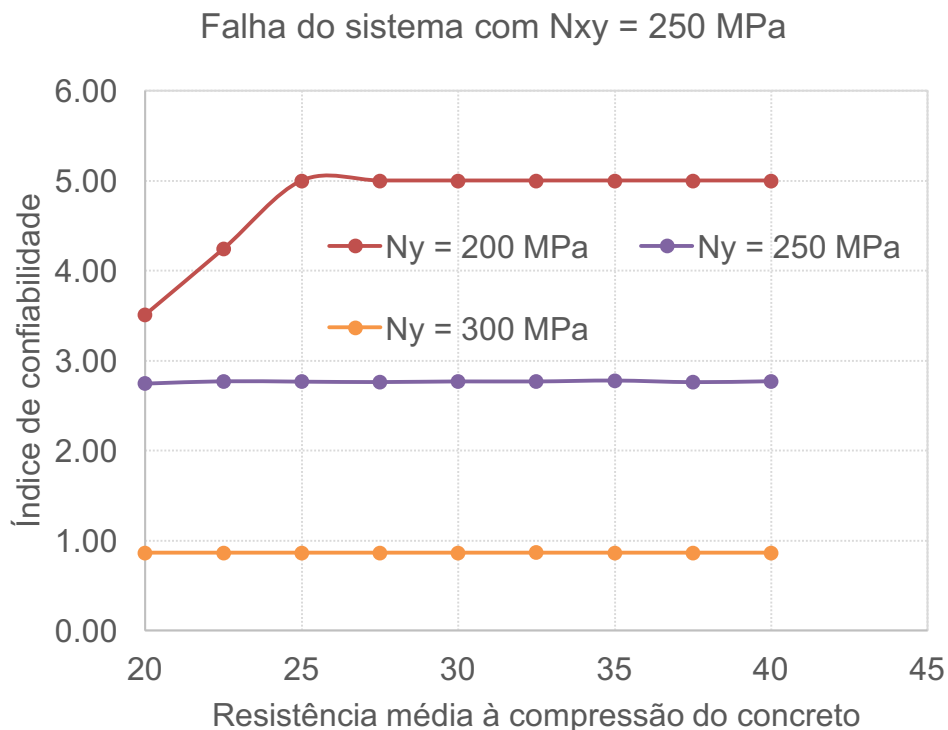
Gráfico 16



Nota-se, que o índice de confiabilidade do escoamento do aço em Y se mantém constante para todos os valores de resistência média à compressão do concreto. Porém, este valor se caracteriza como um valor baixo de confiabilidade do elemento.

O gráfico 17 apresenta uma comparação entre as falhas dos sistemas representados nos gráficos 14, 15 e 16.

Gráfico 17

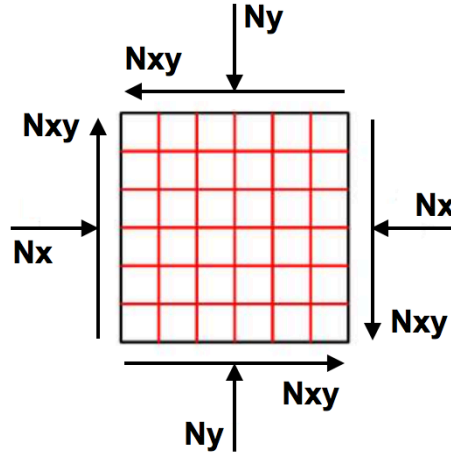


Nota-se que os sistemas em roxo e laranja apresentam um comportamento semelhante, com a única diferença para o valor do índice de confiabilidade. Estes dois sistemas apresentam um comportamento dúctil, por ter o modo de falha igual ao escoamento do aço em Y. O sistema representado em vermelho apresenta um comportamento diferente dos demais, iniciando-se com o modo de falha igual ao esmagamento do concreto (elemento frágil) e com o aumento da resistência média do concreto passa a ter os três modos de falha iguais.

Portanto, com o aumento da tensão normal de tração, há uma diminuição do índice de confiabilidade dos sistemas, tornando os sistemas dos elementos menos confiáveis.

4.8 Compressão em X, Y e cisalhamento

Figura 23: Elemento de membrana submetido à forças normais de compressão em X, Y e cisalhamento.



Dados:

$$Asx = Asy = 9 \text{ cm}^2/m$$

$$h_{inicial} = 0.08 \text{ m}$$

$$Fym = 500 \text{ MPa}$$

$$n = 1000000$$

$$Nxy = 400 \text{ MPa}$$

$$Nx = Ny = -300; -400; -500 \text{ MPa}$$

Funções de falha:

$$G_1 = \left(\frac{f_{cmax} \cdot h}{0,001} \right) - (\sigma_x + \sigma_y + \tau_{xy}) \quad \text{Equação 96}$$

$$G_2 = (Asx \cdot f_{yi} \cdot 0,10) - (\sigma_x + \sigma_y + \tau_{xy}) \quad \text{Equação 97}$$

$$G_3 = (Asy \cdot f_{yi} \cdot 0,10) - (\sigma_x + \sigma_y + \tau_{xy}) \quad \text{Equação 98}$$

De acordo com o gráfico 18 e 19, nota-se que quando as tensões de compressão nas direções X e Y ($N_x = N_y = -300 \text{ MPa}$ ou $N_x = N_y = -400 \text{ MPa}$) são menores ou iguais do que a tensão de cisalhamento $N_{xy} = 400 \text{ MPa}$, a falha do

sistema sempre ocorrerá sempre pelo esmagamento do concreto. Não há, assim, contribuição das armaduras em X e Y na resistência do elemento.

Gráfico 18

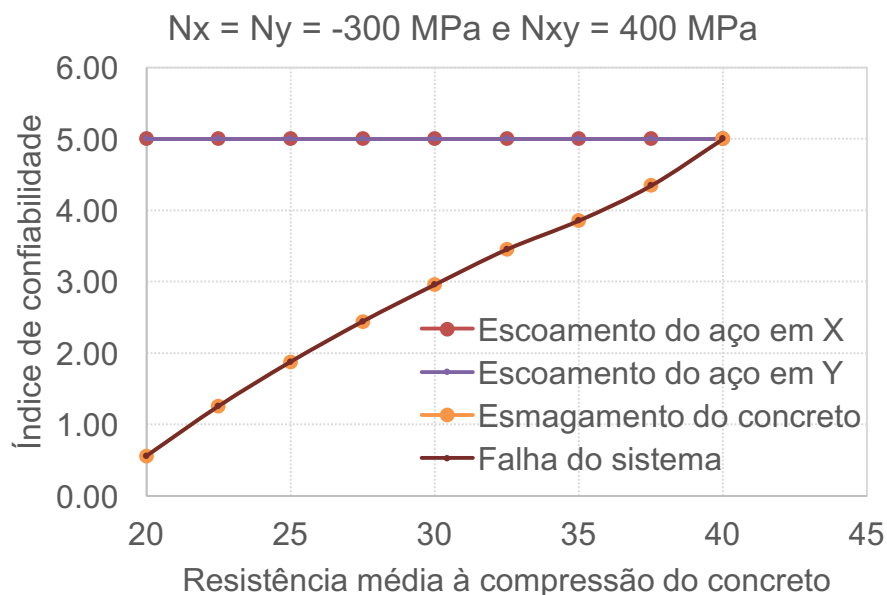
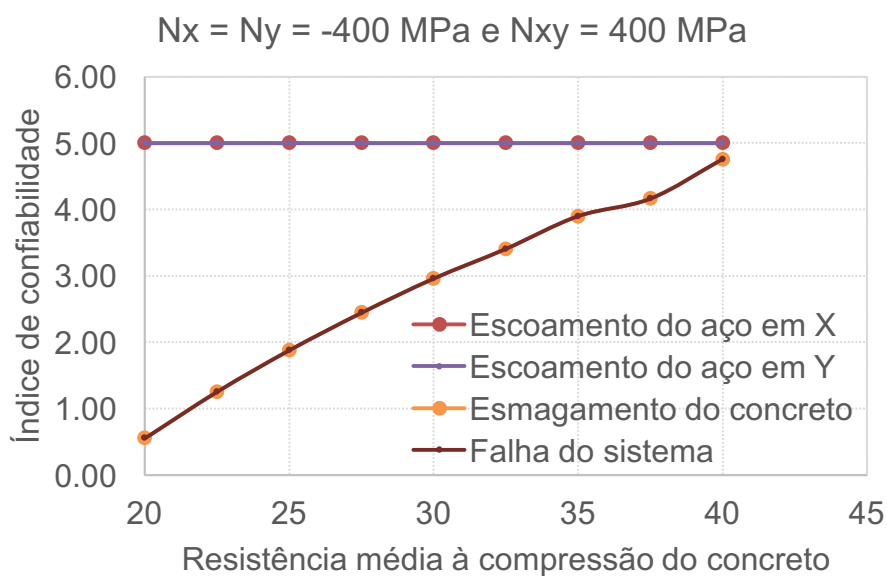


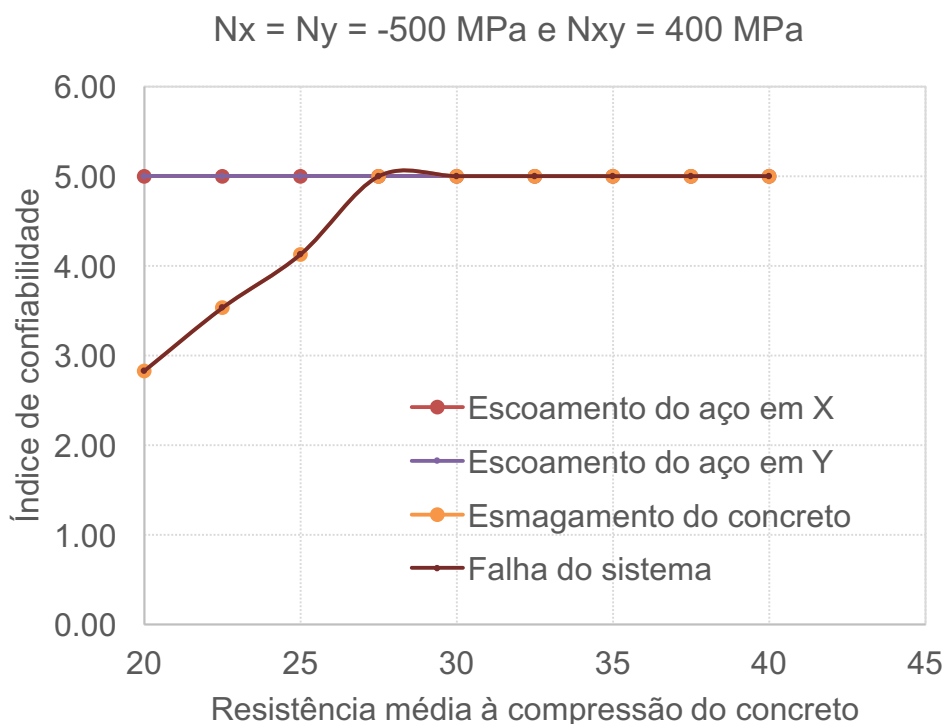
Gráfico 19



Portanto, este elemento se caracteriza por seu comportamento frágil, uma vez que o modo de falha do sistema será ocorrerá pelo esmagamento do concreto. Nota-se que, a medida que a resistência média à compressão do concreto aumento, o índice de confiabilidade do concreto e do sistema aumentam também.

De acordo com o gráfico 20, nota-se que quando a tensão de compressão em X e Y ($N_x = N_y = -500 \text{ MPa}$) é maior do que a tensão de cisalhamento ($N_{xy} = 400 \text{ MPa}$), o elemento começa com o modo de falha pelo concreto e depois passa a apresentar índices de confiabilidade iguais ($\beta_{m\acute{a}x} = 5$) para todos os modos de falha.

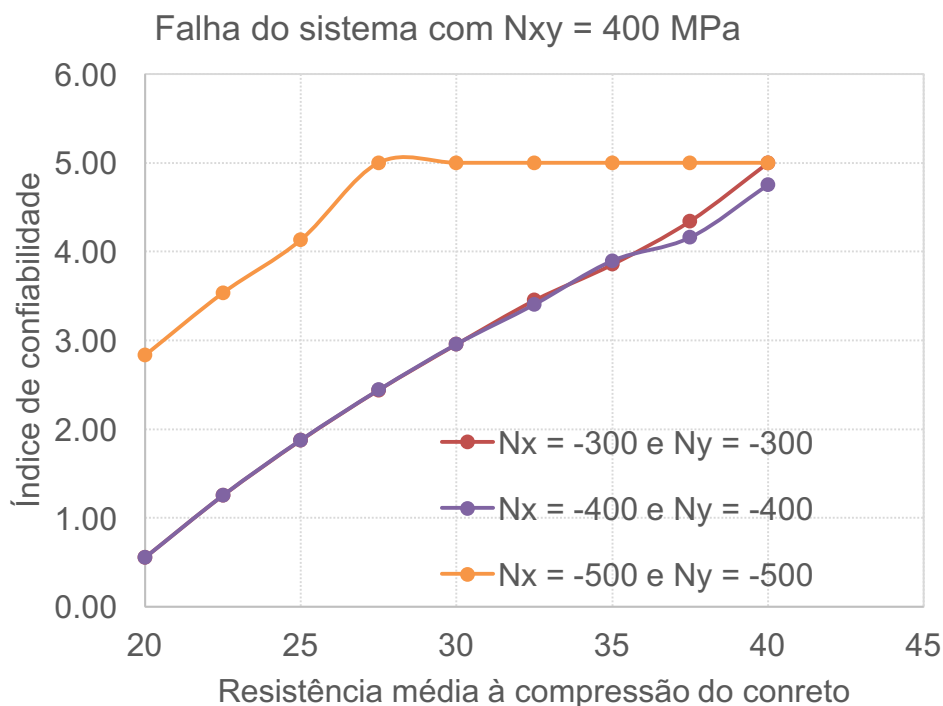
Gráfico 20



Portanto, a medida que a resistência média à compressão do concreto cresce, os índices de confiabilidade do concreto e do sistema aumentam. Quando $f_{cm} \cong 27,5 \text{ MPa}$ todos os modos de falha acontecem ao mesmo tempo, sendo que o índice de confiabilidade se torna máximo (lembrando que o valor máximo de $\beta = 5$ foi atribuído pela limitação de simulação da capacidade de memória do software).

O Gráfico 21 apresenta uma comparação das falhas dos sistemas representados nos Gráficos 18, 19 e 20.

Gráfico 21

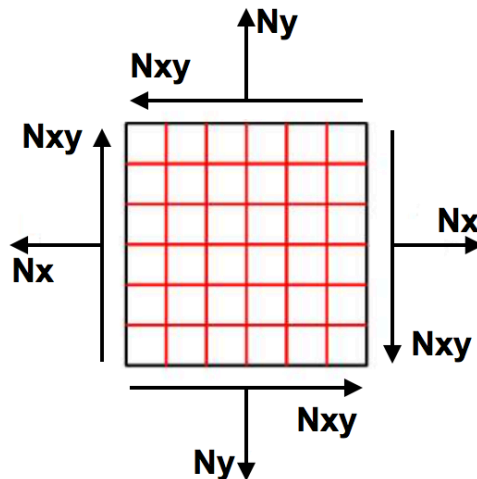


Nota-se que os sistemas representados em roxo e vermelho apresentam comportamento semelhantes, tendo seu nível de confiabilidade inferior ao sistema representado em laranja.

Mesmo com as tensões normais de compressão em X e Y maiores no sistema representado em laranja, seus índices de confiabilidade são maiores do que nos outros sistemas. Isto pode acontecer devido ao efeito de confinamento ser mais predominante quando as tensões normais de compressão são maiores, resultando em um aumento na resistência do sistema.

4.9 Tração em X, Y e cisalhamento

Figura 24: Elemento de membrana submetido à forças normais de tração em X, Y e cisalhamento.



Dados:

$$Asx = Asy = 19 \text{ cm}^2/m$$

$$h_{inicial} = 0.08 \text{ m}$$

$$Fym = 500 \text{ MPa}$$

$$n = 1000000$$

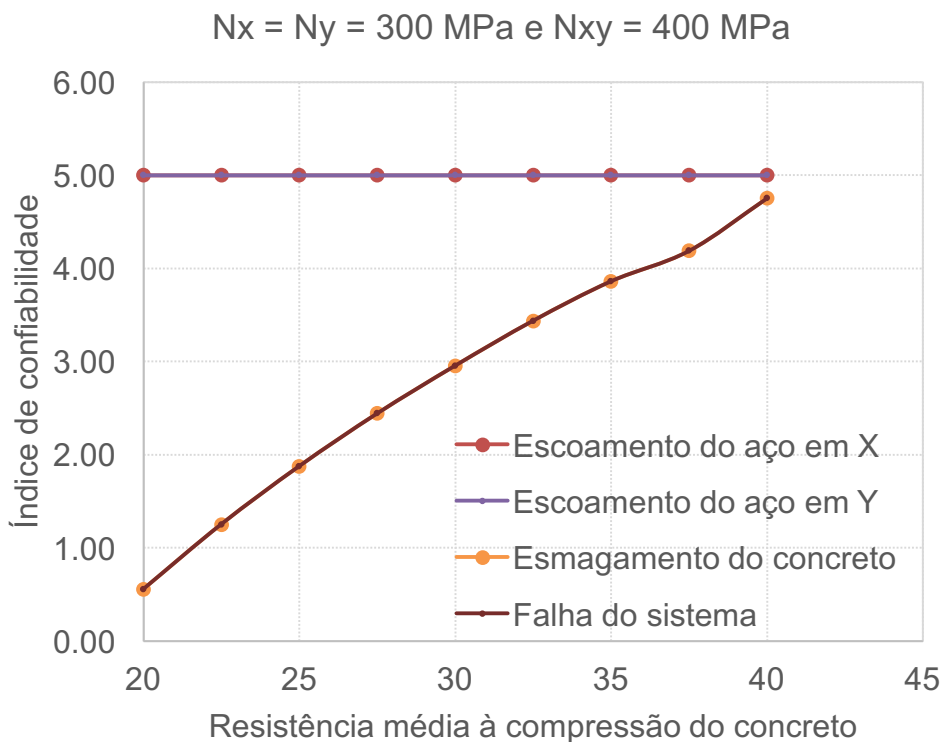
$$Nxy = 400 \text{ MPa}$$

$$Ny = Nx = 300; 400; 500 \text{ MPa}$$

Funções de falha: ver equações 96, 97 e 98.

De acordo com o gráfico 22, quando as tensões normais de tração em X e Y ($N_x = N_y = 300 \text{ MPa}$) forem menores que a tensão de cisalhamento ($N_{xy} = 400 \text{ MPa}$), o elemento terá um comportamento frágil, pois o modo de falha do sistema sempre será igual ao modo de falha do esmagamento do concreto

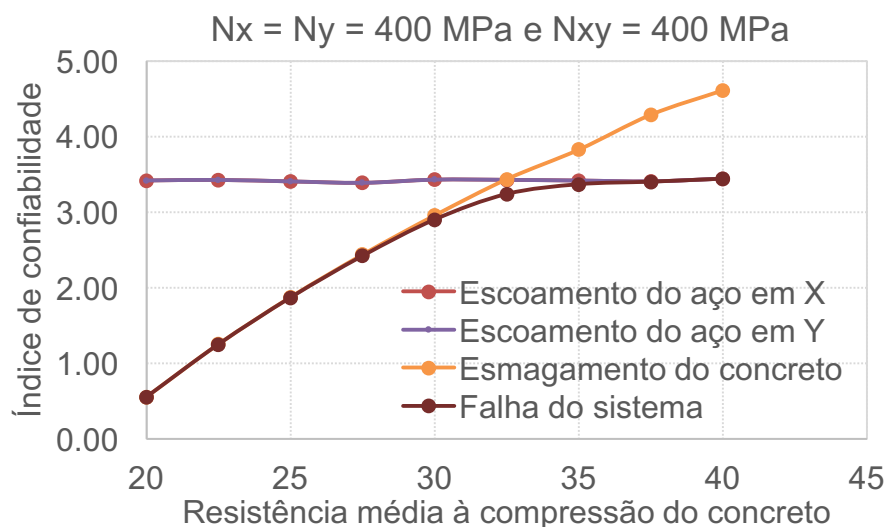
Gráfico 22



Portanto, a medida que a resistência do concreto aumenta, os índices de confiabilidade do concreto e do sistema se tornam maiores. Os índices de confiabilidade do escoamento do aço em X e Y se mantêm constante, não havendo contribuição das armaduras nas duas direções para resistência do elemento.

De acordo com o gráfico 23, quando as tensões normais de tração ($N_x = N_y = 400 \text{ MPa}$) são iguais a tensão de cisalhamento ($N_{xy} = 400 \text{ MPa}$), o elemento começa apresentando um comportamento frágil, devido ao modo de falha ser igual ao esmagamento do concreto. Porém, quando o valor de $F_{cm} \cong 32,5 \text{ MPa}$, o modo de falha passa à ocorrer pelo escoamento das armaduras nas direções X e Y, caracterizando o elemento como dúctil.

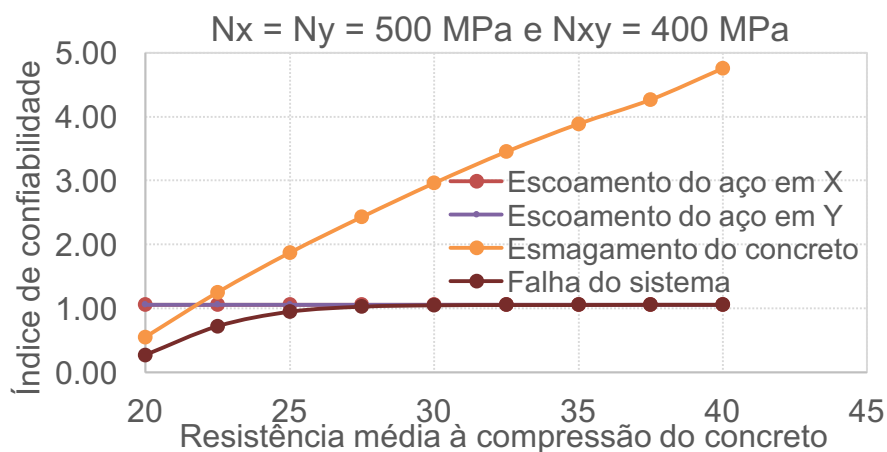
Gráfico 23



Portanto, a medida que a resistência média à compressão do concreto aumenta, o sistema se torna mais confiável.

De acordo com o gráfico 24, nota-se que quando as tensões normais de tração ($N_x = N_y = 500 \text{ MPa}$) são maiores do que a tensão de cisalhamento ($N_{xy} = 400 \text{ MPa}$), o elemento começa apresentando um comportamento frágil, devido ao modo de falha ser igual ao esmagamento do concreto. Porém, quando o valor de $F_{cm} \cong 22,5 \text{ MPa}$, o modo de falha passa a ocorrer pelo escoamento das armaduras nas direções X e Y, caracterizando o elemento como dúctil.

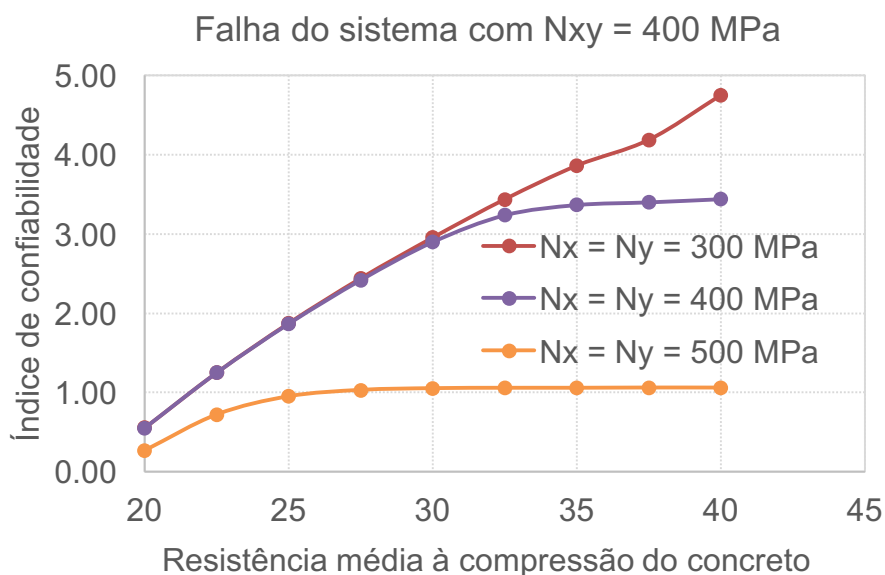
Gráfico 24



Mesmo havendo um pequeno aumento entre $F_{cm} = 20 \text{ MPa}$ e $F_{cm} = 25 \text{ MPa}$, o índice de confiabilidade se mantém baixo para todos os valores de resistência média à compressão do concreto. Isso evidencia que, para o valor de $N_x = N_y = 500 \text{ MPa}$, a armação adotada nas direções X e Y poderia ser maior.

O Gráfico 25 apresenta uma comparação entre os sistemas dos Gráficos 22, 23 e 24.

Gráfico 25



Nota-se que com o aumento das tensões normais de tração, os sistemas tendem a apresentar um nível de confiabilidade mais baixo, evidenciado pelos valores dos índices de confiabilidade de cada sistema.

5. CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Este trabalho apresentou os diversos comportamentos do concreto e do aço nos elementos de membrana em concreto armado quando submetidos a diferentes tensões solicitantes.

A contribuição do concreto e do aço na resistência do elemento depende das tensões solicitantes que estão atuando no elemento. De uma forma geral, o concreto irá resistir à esforços normais de compressão e cisalhamento. O aço, diferentemente do que foi mostrado inicialmente, irá resistir à esforços normais de tração e, também, cisalhamento. Isto ocorre, pois, a medida que o concreto se torna mais resistente, a armadura será cada vez mais solicitada para resistir aos esforços e, conseqüentemente, terá uma parcela resistindo as tensões de cisalhamento, com o intuito de não permitir o escoamento do aço e as fissuras diagonais no concreto.

O nível de confiabilidade do elemento estudado também depende das variáveis aleatórias que são analisadas. A confiabilidade estrutural utilizada consiste no princípio que a probabilidade de falha de resistência no elemento tem que ser sempre maior do que a probabilidade de solicitação no mesmo, garantindo-se assim, a sua segurança. O índice de confiabilidade (β) foi utilizado como um valor de normatização para medir o nível de segurança do elemento de membrana. Variando de 0 à 5, ele representa, para os diferentes modos de falha, um elemento menos seguro ou mais seguro, respectivamente.

No Método de Monte Carlo, repetidos processos de simulações são realizados para saber quantas vezes ocorreu a falha em determinada situação. Os modos de falhas analisados foram: esmagamento do concreto, escoamento do aço em X e Y e falha do sistema. Assim, para cada parâmetro analisado tem-se uma probabilidade de falha. Para elementos com maiores tensões atuantes, menor resistência média à compressão do concreto, menor espessura do elemento e menores valores de armadura em X e Y a probabilidade de falha se torna maior.

Assim, por meio dos resultados obtidos, é possível que o projetista “trabalhe” com as variáveis aleatórias do problema para se alcançar o melhor cenário quando

um elemento de membrana é analisado. Ou seja, tornar o elemento dúctil, garantindo que o escoamento do aço ocorre anteriormente ao esmagamento do concreto.

Sugestões para trabalhos futuros:

- Modelar estruturas mais complexas com elementos de membrana;
- Analisar o comportamento e a segurança destas estruturas aplicando-se confiabilidade estrutural;
- Analisar novas variáveis aleatórias acerca da nova estrutura;
- Encontrar as probabilidades de falha destas estruturas por meio do Método de Monte Carlo;
- Projetar a estrutura, baseada nos parâmetros estudados e otimiza-la para que haja maior segurança, menos gastos com materiais e se saiba a real probabilidade de falha de ocorrência nesta.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*, Rio de Janeiro, 2014, 238p.

CHWIF, Leandro; MEDINA, Afonso C. *Modelagem e simulação de eventos discretos: teoria & aplicação*. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015, 294p.

GOMES, Aline. C. *Análise de Confiabilidade Estrutural de uma Viga em Concreto Armado Submetido à Ação Combinada de Cisalhamento e Torção pelo Método de Monte Carlo*. 2008. 62p. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

HART, Gary C. *Uncertainty Analysis, Loads, and Safety in Structural Engineering*. 224p. Mechanics and Structures Department, School of Engineering and Applied Science, University of California, Los Angeles.

HOOGENBOOM, P.C.J. *Discrete Elements and Nonlinearity in Design of Structural Concrete Walls*. Dissertação (Mestrado) - Delf University of Technology, 1998.

JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY – JCSS (2001), *The Probabilistic Model Code*. Disponível em: < www.jcss.byg.dtu.dk >. Acesso em: 22.mai.2016.

LEONHARDT, F.; MONNING, E. *Construções de Concreto: Princípios Básicos do Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado*. Vol. 1. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1977, 305p.

LEONHARDT, F.; MONNING, E. *Construções de Concreto: Princípios Básicos do Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado*. Vol. 2. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1975, 161p.

LEONHARDT, F.; MONNING, E. *Construções de Concreto: Princípios Básicos do Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado*. Vol. 3. 3. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1977, 273p.

MORAES, Caline S. *Avaliação de Segurança de um Pilar Misto via Confiabilidade*. 2015. 85p. Trabalho de Conclusão de Curso – Faculdade de Tecnologia e Ciências Aplicadas, Centro Universitário de Brasília, Brasília.

PANTOJA, João da C. *Geração automática via otimização topológica e avaliação de segurança de modelos de bielas e tirantes*. 2012. 240p. Tese (doutorado) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SANTOS, Victor M. P. dos. *Análise de Confiabilidade em Modelos de Bielas e Tirantes*. 2012. 137 p. Monografia de Pós-Graduação – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

SOARES, Rodrigo de C.; VENTURINI, Wilson S. *Introdução à análise de confiabilidade*. São Carlos, 2001. 182p.

SOUZA, Osvaldo L. de C. *Aplicação da Teoria da Confiabilidade às vigas de concreto armado reforçadas à torção com compósito de fibras de carbono*. 2011. 191p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal Fluminense, Niterói.

SOUZA, Rafael A. *Análise e Dimensionamento de Elementos de Membrana em Concreto Estrutural*. E-livro, Maringá, 2015. Disponível em: < <http://www.gdace.uem.br/Rafael/Rafael.htm> >. Acesso em: 26.abr.2016.

VERZENHASSI, C. C. *Otimização de Risco Estrutural Baseada em Confiabilidade*. Dissertação (Mestrado). Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos/SP, 2008.

ZAGOTTIS, Décio. *Concreto Armado e Protendido: sobre a introdução da segurança no projeto estrutural*. 1987. 4º colóquio sobre comportamento de estruturas. Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro.